

Paulo José Saiz Jabardo

## **Escalas, Modelos e Semelhança**

2022

# Sumário

<b>Sumário</b>	<b>2</b>
<b>1 Um problema simples mas nem tanto</b>	<b>4</b>
1.1 Modelos	6
1.2 Escalas	7
1.3 Parâmetros adimensionais	8
1.4 Semelhança	8
1.5 Um modelo é uma idealização do problema	9
1.6 Estrutura deste artigo	9
<b>2 Um pouco de geometria</b>	<b>10</b>
2.1 Teorema de pitágoras	11
2.2 Floco de Koch	12
<b>3 Equações diferenciais</b>	<b>15</b>
3.1 Pêndulo simples	15
3.1.1 O que se pode desprezar	15
3.1.2 Modelo matemático simples	17
3.2 Difusão de calor	18
3.2.1 Problema 3D	18
3.2.2 Uma barra fina e comprida	19
3.2.3 Auto-semelhança: barra infinita	20
3.3 escoamento incompressível ao redor de uma esfera	20
3.4 Equações de Euler - $Re \rightarrow \infty$	22
3.5 Equação de Stokes	23
3.6 E Stokes para um cilindro infinito?	24
3.7 Velocidade variando ciclicamente	24
3.8 Esfera em uma base elástica	25
3.9 Camada Limite quando $Re \rightarrow \infty$ e solução de Blasius para a placa plana	27
3.9.1 Estimativa da espessura da camada limite	27
3.9.2 A camada limite na placa plana	29
3.9.3 A solução de Blasius	31

3.10	Será que o problema da esfera já está resolvido? . . . . .	33
3.11	Semelhança . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Será que podemos simplificar este processo? . . . . .</b>	<b>35</b>
4.1	Ordem de grandeza de cada termo de uma equação diferencial . . . . .	35
4.2	Usando diretamente os princípios da física com estimativas de ordem de grandeza . . . . .	36
<b>5</b>	<b>Análise dimensional . . . . .</b>	<b>38</b>
5.1	Escoamento viscoso ao redor de uma esfera . . . . .	38
5.2	Formulação do problema: constantes, variáveis e parâmetros . . . . .	43
5.3	Dimensões e Unidades e Grandezas Adimensionais . . . . .	44
5.4	Classes e Sistemas de Unidades . . . . .	46
5.4.1	Classes de sistemas de unidades e o sistema SI . . . . .	49
5.5	A dimensão de uma grandeza é sempre um monômio . . . . .	49
5.6	Grandezas independentes a dependentes . . . . .	52
5.7	O teorema dos $\Pi$ s de Buckingham . . . . .	53
<b>6</b>	<b>Semelhança e modelos em escala reduzida . . . . .</b>	<b>56</b>
6.1	Modelos em escala reduzida . . . . .	57
6.1.1	Semelhança incompleta . . . . .	58
6.2	Incompatibilidade entre adimensionais . . . . .	59
6.3	Abordagem geral . . . . .	60
<b>7</b>	<b>Exemplos . . . . .</b>	<b>62</b>
7.1	Pêndulo simples . . . . .	62
7.1.1	E se existir amortecimento? . . . . .	64
<b>8</b>	<b>E agora? Conclusões e discussão . . . . .</b>	<b>65</b>
	<b>Referências . . . . .</b>	<b>66</b>

# 1 Um problema simples mas nem tanto

Vamos começar com um problema simples: o que cai mais rápido, uma bola de boliche ou uma pena?

A resposta a esta pergunta vai depender de quem está respondendo. Pergunte a uma criança ou a um adulto sem boa formação científica, a resposta será a bola de boliche. Agora, se a pergunta for feita a um vestibulando ou aluno de graduação das ditas “ciências exatas”, a resposta será contundente: ambos caem com a mesma velocidade acelerando uniformemente.

Naturalmente, o aluno de “exatas” está correto, não é? Qualquer um pode fazer um experimento simples para testar estas hipóteses. Infelizmente o resultado mostrará que a criança tem razão. O aluno de “exatas” vai reclamar que isso é injusto pois se não tivermos atrito, ele teria razão. Infelizmente a natureza não liga para estes detalhes. O homem precisou pisar na lua para observar esta solução “correta”: <<https://www.youtube.com/watch?v=KDp1tiUsZw8>>. Não precisamos necessariamente ir para a lua: uma câmara de vácuo gigante serve como mostrou Brian Cox em <<https://www.youtube.com/watch?v=E43-CfukEgs>>.

Convenhamos, ir para a lua ou ter acesso a uma câmara de vácuo gigante não é para qualquer um. A dúvida que surge a um observador externo ao sistema educacional científico é: o que é que vocês estão fazendo???

Não, não estamos torturando nossos jovens nem fazendo pegadinhas, estamos introduzindo o método científico. Ao contrário do que se imaginaria ao ler as redes sociais e grande mídia, a ciência não é um conjunto de fatos que devem ser decorados mas sim uma abordagem sistemática para explorar o mundo. Ao se desprezar o atrito, o problema fica muito mais simples e as leis fundamentais do universo podem começar a ser exploradas. A importância de Galileu Galilei na ciência não foram os fatos que ele desvendou mas sim a sua abordagem. Um exercício intelectual onde qualquer tipo de atrito é desprezado permitiu a formular os primeiros princípios da mecânica e o resto, como sabemos, é história.

Será que não seria melhor sermos mais preciso em nossa análise? O vídeo do Brian

Cox também ajuda elucidar esta questão. Antes de soltar a bola de boliche e a pena no vácuo, ele solta na presença do ar. Por um lado, a dinâmica da pena é extremamente complexa. Mas não existe diferença perceptível na dinâmica da bola de boliche. Fazendo uma análise frame a frame da imagem chega-se a uma aceleração de aproximadamente  $9.8 \text{ m/s}^2$ . Para se notar qualquer diferença entre a bola de boliche caindo no vácuo e no ar seriam necessárias medições cuidadosas, algo muito mais complexo e caro.

Se no caso da bola de boliche, as diferenças são pequenas, a trajetória da pena é extremamente complexa. Observando de perto o momento em que ela é solta, observa-se que há grandes deformações das penas logo no começo (1 min e 39 s no vídeo do Brian Cox acima). Talvez se as penas fossem rígidas a coisa seria mais simples. Solta um pedaço pequeno de papel ou cartolina onde as deformações são pequenas e a trajetória continua sendo complexa. Talvez seja uma questão de simetria, o que certamente é um ponto interessante. Soltando uma placa fina, inicialmente ela terá um comportamento próximo do que se observa com a bola de boliche mas não é necessário esperar muito tempo até que a complexidade apareça. Para eliminar estas dificuldades poderíamos soltar uma esfera bem leve e lisa, talvez uma bexiga, ou bola de criança ou até mesmo a bola de ping-pong. Mesmo assim, a trajetória pode ser complexa se esperarmos um pouquinho.

Tentar analisar a trajetória exata da pena é provavelmente impossível: o problema é certamente caótico e ao se repetir o experimento, o jeito da trajetória será o mesmo mas cada repetição terá uma trajetória única. Até mesmo caracterizar a geometria e propriedades mecânicas da pena é uma tarefa ingrata. Simplificar o problema, o que aqui chamamos de modelagem é a única saída.

Agora é possível entender a genialidade de Galileu. Atacar o problema diretamente mexe com todas as suas nuances é um problema quase impossível mesmo nos dias de hoje onde todos (ou quase) os fenômenos envolvidos são conhecidos. O problema da queda da pena envolve tudo o que há de mais difícil em dinâmica, mecânica dos fluidos, elasticidade, biologia, etc. Este problema “simples”, é muito mais complexo do que parece. Se para Galileu e Newton (e mais tarde Einstein, Heisenberg, Schrödinger, etc) o problema era determinar os fundamentos da física, hoje em dia, mesmo conhecendo detalhadamente todos (será?) os fenômenos que ocorrem na queda da pena ainda estamos longe de prever de maneira precisa a sua trajetória. As coisas podem ser difíceis por motivos diferentes.

Para Galileu, Newton, Einstein, etc a dificuldade era a física ainda não conhecida. Para nós é a enorme complexidade e a grande quantidade de detalhes presentes em qualquer problema real.

## 1.1 Modelos

Mas nem tudo está perdido. A queda da bola de boliche no ar sugere que podemos simplificar um pouco o problema e aplicar a segunda lei de Newton:

$$ma = mg - F_a$$

Nesta equação,  $m$  é a massa da bola,  $a$  é a sua aceleração,  $g$  a aceleração da gravidade e  $F_a$  é a força de atrito. Se  $F_a = mg$ , a aceleração é zero e portanto a velocidade é constante. Esta velocidade é conhecida como velocidade terminal. No entanto, se  $F_a$  for pequeno,  $F_a \ll mg$ , o problema é muito semelhante ao problema no vácuo.

É lógico que o problema não está resolvido: quanto vale  $F_a$ ? Isso poderia ser obtido realizando experimentos ou calculando a partir das equações da mecânica. Um modelo comum, que será explorado a fundo adiante é:

$$F_a = C_D A \frac{1}{2} \rho U^2$$

onde  $C_D$  é um coeficiente,  $A$  é a área da seção transversal da esfera ( $\pi D^2/4$ ),  $\rho$  é a massa específica do ar (ou qualquer outro fluido) e  $U$  é a velocidade de queda. Neste modelo, com o passar do tempo, a velocidade aumenta mas com isso também aumenta a força de arrasto, reduzindo a aceleração. Se esperarmos tempo o suficiente, a força de arrasto irá se igualar com o peso e não haverá mais aceleração. Esta velocidade é conhecida como velocidade terminal. Conhecendo  $C_D$ , podemos estimar a velocidade terminal:

$$U = \sqrt{\frac{2mg}{C_D A \rho}}$$

O segredo é não olhar com atenção demais estas equações.  $C_D$  varia com a velocidade (mais precisamente com um número adimensional chamado de número de Reynolds) mas também varia com a orientação do corpo. As forças podem não estar alinhadas na vertical e variar no tempo (estas duas situações ocorrem na realidade), nenhuma bola é

uma esfera perfeita e por aí vai. Mas com cuidado e discernimento, pode-se chegar longe com estes modelos simples. Mas a realidade é muito mais complexa. Quem não se lembra das reclamações sobre a bola Jabulani na copa de 2010. Quem diria que uma bola de futebol poderia causar tantos problemas no século XXI. Nem vou mencionar o quão difícil é jogar bola com uma bexiga. Estes dois exemplos não se resumem à queda vertical de uma esfera mas mostram que a dinâmica de uma esfera em um meio fluido é mais complexo do que parece. O vídeo <[https://www.youtube.com/watch?v=16Ci\\_2bN\\_zc](https://www.youtube.com/watch?v=16Ci_2bN_zc)> do excelente canal Veritassium entra em maiores detalhes sobre a velocidade terminal de corpos caindo.

Este modelo ainda tem um problema sério: uma bexiga com hélio ou uma bola de ping-pong dentro d'água vai ter um comportamento bem diferente. Então podemos introduzir um novo termo na equação: o princípio de Arquimedes. No entanto, agora uma nova dificuldade aparece: qual a direção da força de arrasto? Considerando a direção  $z$  como vertical para cima,

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -mg - C_D A \frac{1}{2} \rho |U| \cdot U + g m_f$$

onde  $z$  é a altura da esfera, e  $m_f$  é a massa de fluido se a esfera fosse feita do mesmo fluido que o meio e pode ser escrita como  $\rho \cdot g \cdot V$  onde  $V$  é o volume ocupado pelo corpo. Agora temos um modelo que funciona, mais ou menos bem. Leva em consideração a força de arrasto, a flutuação e o campo gravitacional. Existe uma caixa preta que é o coeficiente de arrasto  $C_D$ . Todas as limitações discutidas acima permanecem mas este modelo pode fornecer várias informações interessantes. Para se resolver esta equação diferencial, precisamos das condições iniciais: No instante,  $t = 0$ ,  $U = U_0$  (no nosso exemplo  $U_0 = 0$ ) e  $z = 0$ .

## 1.2 Escalas

Fazem parte deste modelo diferentes parâmetros,  $m$ ,  $g$ ,  $C_D$ ,  $A$ ,  $\rho$  e  $V$ . Estes parâmetro não são independentes. Dado um corpo rígido, existe uma relação entre volume e área. A razão entre os dois é um comprimento que no caso de uma esfera, vale

$$\frac{V}{A} = \frac{2}{3} \cdot D$$

Se quisermos saber a velocidade terminal, basta postular que a aceleração é zero:

$$mg + C_D A \frac{1}{2} \rho |U| \cdot U = g \rho V$$

Dividindo esta equação por  $g \rho V$  chegamos à seguinte relação:

$$\left| \frac{m}{\rho V} - 1 \right| = \frac{C_D A U^2}{2 V g}$$

Lembrando que existe uma relação entre volume e área, e definindo  $L = \sqrt[3]{V}$

$$\left| \frac{m}{\rho L^3} - 1 \right| = k \cdot \frac{U^2}{L g}$$

onde  $k$  é uma constante que depende da geometria e incorpora não apenas a razão entre volume e área mas também o coeficiente de arrasto e constante 2. Este problema, da maneira que está escrito, depende dos seguintes parâmetros:

- $m$  - massa do corpo
- $\rho L^3$  - massa do fluido deslocado pelo corpo
- $L g$  - Dimensão vezes aceleração da gravidade
- $k$  - um coeficiente que depende da geometria e aerodinâmica

### 1.3 Parâmetros adimensionais

Nesta última equação, os termos  $\frac{m}{\rho L^3}$ ,  $k$  e  $\frac{U^2}{L g}$  não possuem unidades, ou seja, mudando o sistema de unidades o valor destas grandezas fica constante. Estas são grandezas adimensionais. Repare que neste modelo, estes parâmetros adimensionais são resultado da razão de forças - dividimos a equação original pela força de flutuação.

### 1.4 Semelhança

Estes parâmetros adimensionais, produto de manipulação simples do modelo original, tem consequências interessantes. Neste modelo, fixado os parâmetros adimensionais  $\frac{m}{\rho L^3}$  e  $k$ , o outro parâmetro adimensional  $\frac{U^2}{L g}$  é conhecido. Podemos mudar a massa,

densidade do fluido, aceleração da gravidade e dimensões do corpo mas enquanto estes parâmetros forem os mesmos, teremos um mesmo valor de  $\frac{U^2}{Lg}$ . Este é o resultado mais conhecido da Análise Dimensional e é essencial na condução de experimentos em escala reduzida.

## 1.5 Um modelo é uma idealização do problema

Chegamos a um modelo para a velocidade problema da queda de um corpo. Para se chegar a este modelo utilizamos uma relação básica da dinâmica, a segunda lei de Newton e um modelo empírico para a força de arrasto de um corpo. A maneira como empregamos a segunda lei de Newton já pressupõe várias simplificações no problema como o fato da força de arrasto estar alinhado com a vertical o que sabemos não ser verdade para a queda de uma pena. Escondemos todas as dificuldades no coeficiente semi-empírico  $C_D$ . Sabemos que a realidade é muito mais complicada. Mas este modelo pode fornecer informações importantes. Mesmo no caso da queda de uma pena, um coeficiente de arrasto médio pode fornecer informações importantes.

Na pior das hipóteses, um modelo simples permite compreender melhor o problema real e estimar as grandezas importantes do problema, facilitando o projeto de experimentos mais sofisticados.

## 1.6 Estrutura deste artigo

Com o exemplo do corpo caindo em um meio fluido em um campo gravitacional constante, introduzimos vários conceitos como modelos, parâmetros adimensionais e semelhança. Vamos, agora, entrar mais a fundo em cada questão. Geometria simples será usada para entender melhor os parâmetros adimensionais e semelhança. Em seguida usaremos estes conceitos em alguns problemas simples com equações diferenciais conhecidas, em particular a aerodinâmica de uma esfera. Finalmente apresentaremos a análise dimensional e o teorema dos IIs de Buckingham.

## 2 Um pouco de geometria

Todo mundo sabe que a área de um quadrado é dado pelo quadrado de sua aresta,  $A = a^2$ . O perímetro por sua vez é um múltiplo da aresta,  $P = 4 \cdot a$ . No caso de uma circunferência de raio  $r$ ,  $A = \pi r^2$  e  $P = 2\pi r$ . Em geral qualquer figura geométrica apresenta relações do tipo

$$\frac{A}{L^2} = k_1 \quad \longrightarrow \quad \frac{P}{L} = k_2$$

de modo que a razão entre a área e uma dimensão característica ao quadrado é uma constante e a razão entre perímetro e esta mesma dimensão característica também é constante.

Este tipo de relação continua valendo para figuras compostas mais complexas como a dada na figura 1 que mostra uma geometria um pouco mais complexa, composta por dois retângulos. Neste caso, a área é  $A = a \cdot b + c \cdot d$  e o perímetro é  $a + 2b + 2d + c$ . Novamente esta figura geométrica pode ser especificada usando o lado  $a$  e três parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$  onde

$$b = \alpha_1 \cdot a, \quad d = \alpha_2 \cdot a, \quad c = \alpha_3 \cdot a$$

A área e o perímetro desta figura geométrica são dadas por:

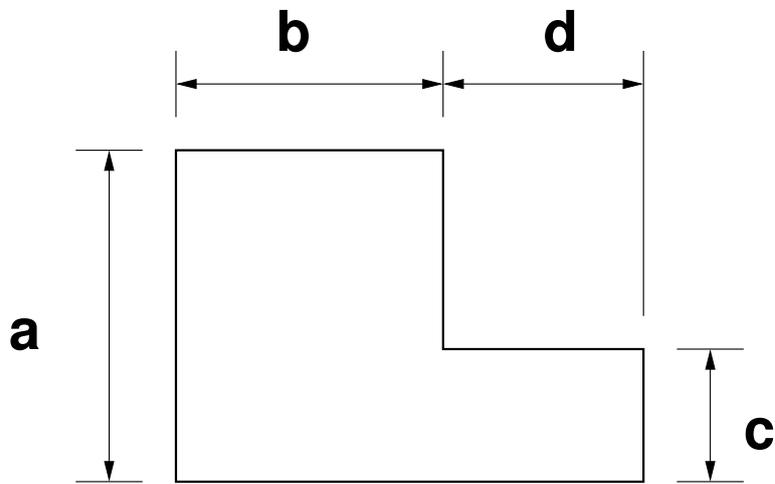
$$\frac{A}{a^2} = (\alpha_1 + \alpha_2 \cdot \alpha_3) \quad \frac{P}{a} = (1 + 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3)$$

o que se percebe é que existe um padrão, a cada figura geométrica, pode-se associar uma escala  $a$  e com a ajuda de outros parâmetros pode-se definir funções como área e perímetro de modo que

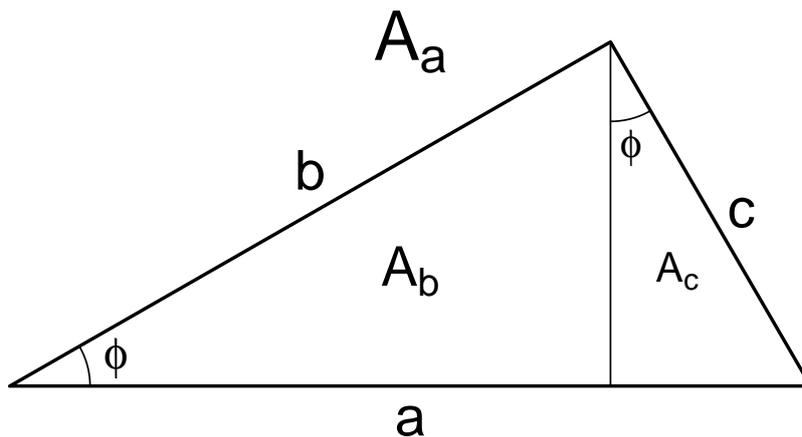
$$\frac{P}{a} = f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots) \quad \frac{A}{a^2} = g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$$

Ao se multiplicar todas as dimensões características de um figura geométrica por uma constante, ou seja, na figura 1, multiplicar  $a$  por esta constante, o perímetro varia linearmente com esta constante e a área varia com o seu quadrado. Escolhendo  $a' = k \cdot a$ , a área  $A'$  e perímetro  $P'$  desta nova figura geométrica têm o seguinte valor:

$$P' = \frac{a'}{a} \cdot P = k \cdot P \quad A' = \left(\frac{a'}{a}\right)^2 \cdot A = k^2 \cdot A$$



**Figura 1** – Figura geométrica composta por dois retângulos

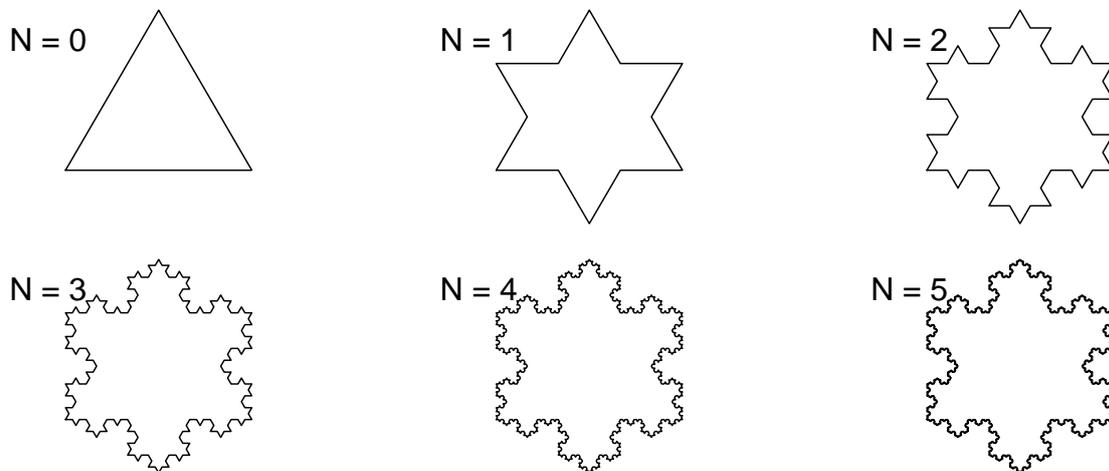


**Figura 2** – Teorema de Pitágoras

As grandezas que permanecem constantes quando se muda a escala da figura geométrica são parâmetros adimensionais.

## 2.1 Teorema de pitágoras

Dois triângulos são semelhantes se dois ângulos são iguais. Se um dos ângulos é reto, o triângulo é chamado de de triângulo retângulo. Se a hipotenusa for escolhida como dimensão característica e o ângulo entre a hipotenusa e um cateto for denominado por  $\phi$ , a



**Figura 3** – Desenvolvimento do floco de Koch.

área deste triângulo é dada por uma relação do tipo

$$A(h, \phi) = h^2 \cdot f(\phi)$$

A figura mostra como um triângulo retângulo pode ser dividido em dois triângulos retângulos semelhantes (mesmo ângulo  $\phi$ ). Nesta subdivisão,

$$A_a a^2 \cdot f(\phi) = A_b + A_c = b^2 \cdot f(\phi) + c^2 \cdot f(\phi)$$

Dividindo por  $f(\phi)$  chega-se ao teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Para concluir, esta demonstração do teorema de Pitágoras é resultado do fato de que a área de um triângulo é o produto entre hipotenusa ao quadrado e uma função do ângulo de um dos vértices, que não muda com a escala.

## 2.2 Floco de Koch

As relações anteriores continuam válidas no caso de figuras geométricas mais “exóticas”. A figura 3 mostra um floco de Koch

A área e perímetro do floco de Koch dependem da dimensão básica  $L$  (lado do triângulo original) e o número de vezes  $N$  que o floco é refinado. A área e o perímetro é dado por:

$$\frac{A}{L^2} = \frac{\sqrt{3}}{20} \cdot \left[ 8 - 3 \left( \frac{4}{9} \right)^N \right] \quad \longrightarrow \quad \frac{P}{L} = 3 \cdot \left( \frac{4}{3} \right)^N$$

É interessante observar que no limite  $N \rightarrow \infty$  a área chega a um limite finito mas o mesmo não ocorre com o perímetro que sempre aumenta:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A}{L^2} = \frac{2}{5} \sqrt{3} \qquad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{P}{L} = \infty$$

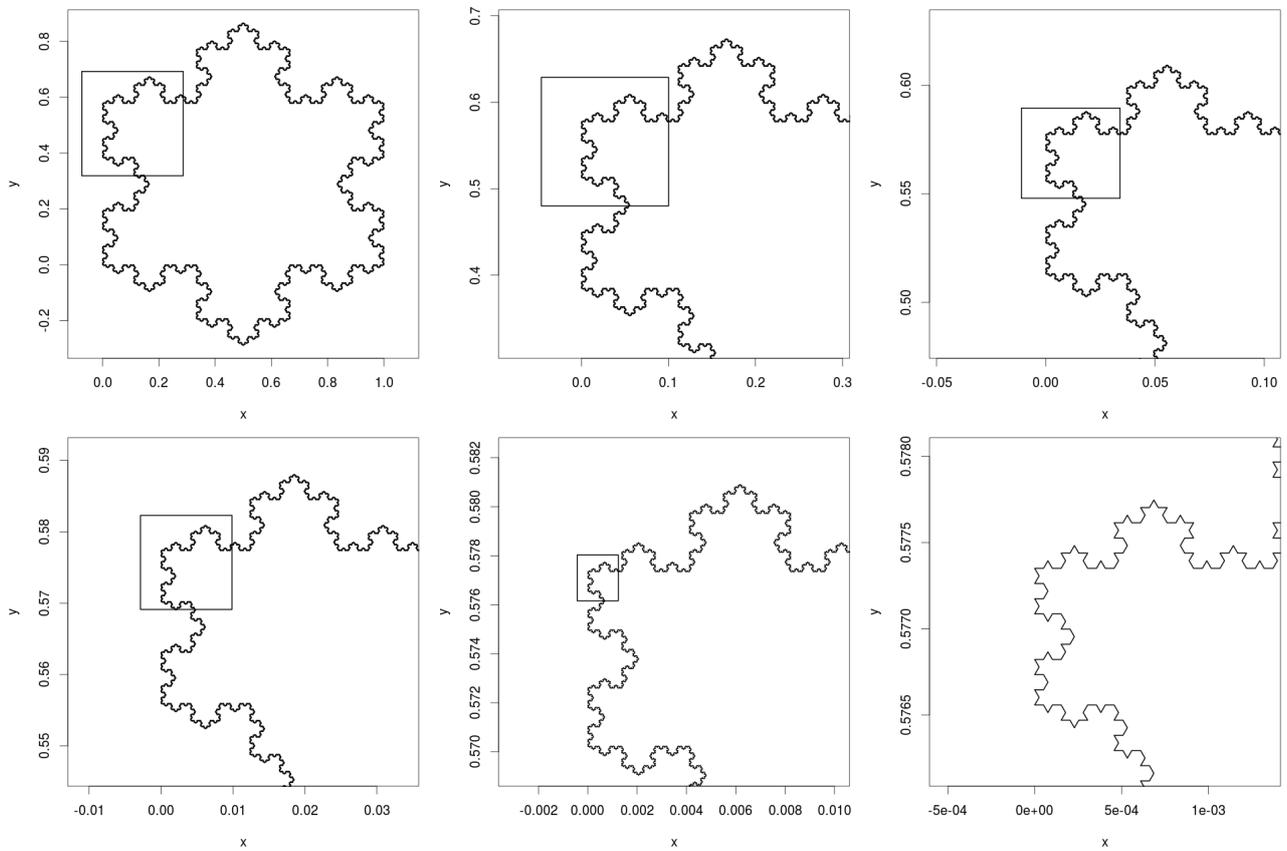
Mas mesmo neste caso as regras dimensionais envolvendo a área e o perímetro continuam valendo se  $N$  for fixado. Por outro lado se  $N$  pode variar as relações anteriores indicam que aproximações são possíveis em algum caso. Se o fenômeno em questão depender da área, basta escolher  $N$  grande o suficiente. Já se depender do perímetro talvez seja necessário especificar  $N$ .

Este tipo de geometria pode parecer uma curiosidade matemática mas a natureza está repleta de coisas deste tipo. Qual o comprimento da costa do Brasil? Richardson (o mesmo da cascata de energia da turbulência, meteorologia computacional, etc) tentou determinar o comprimento da costa do Reino Unido e chegou em relações como a anterior. Qual a fronteira de uma nuvem? Em uma camada limite turbulenta, qual a geometria que separa o escoamento externo potencial do escoamento turbulento?

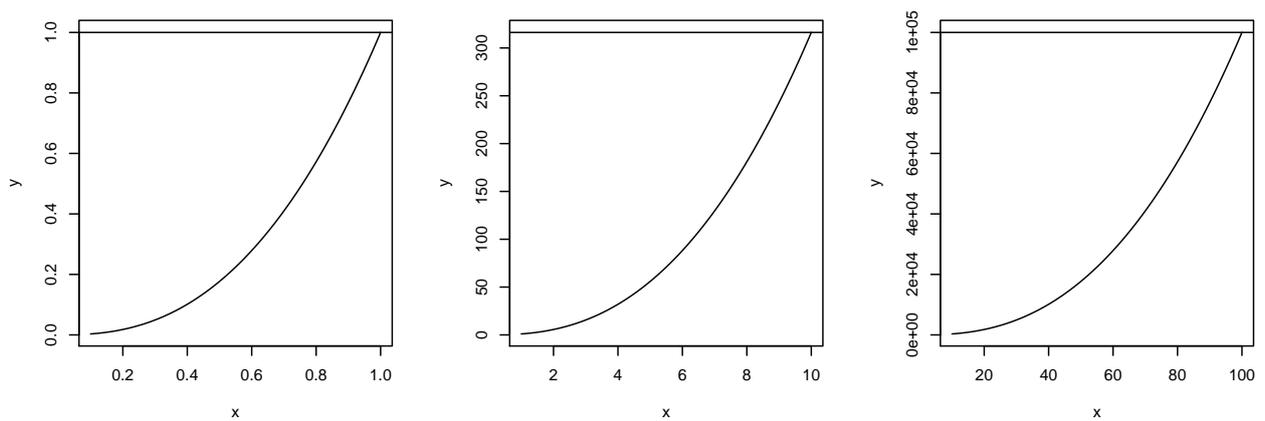
O floco de Koch também apresenta uma outra característica interessante e importante: auto-semelhança. A figura 4 mostra vistas explodidas de uma seção do floco de Koch. Repare que os padrões se repetem em diferentes escalas. A auto-semelhança é observada em escalas intermediárias. Nas maiores escalas (muito maiores que o floco) ela deixa de ser observada. Nas menores escalas chegamos à resolução da figura e a auto-semelhança se perde.

O fenômeno da auto-semelhança não está restrita a geometrias exóticas e fenômenos complexos. Sempre que leis de potência existirem, será observado auto-semelhança, como se vê na figura 5 onde a lei de potência

$$y = x^{\frac{5}{2}}$$



**Figura 4** – Auto-semelhança no floco de Koch.



**Figura 5** – Auto-semelhança em leis de potência. A curva  $y = x^{5/2}$  em diferentes escalas.

é observada em diferentes escalas. Visualmente nada muda.

## 3 Equações diferenciais

Boa parte do que se faz em ciência e tecnologia envolve fenômenos cujas equações básicas são conhecidas mesmo que se saiba pouco sobre o fenômeno em si. Tomemos como exemplo o escoamento de um fluido Newtoniano incompressível ao redor de um cilindro de grande comprimento. As equações básicas, equações de Navier-Stokes são conhecidas a quase 2 séculos mas este continua sendo um problema onde ocorre muita pesquisa, com muitos artigos em revistas científicas e pesquisadores ao redor do mundo empenhando grandes esforços neste problema aparentemente simples. Esta é uma situação comum em ciência.

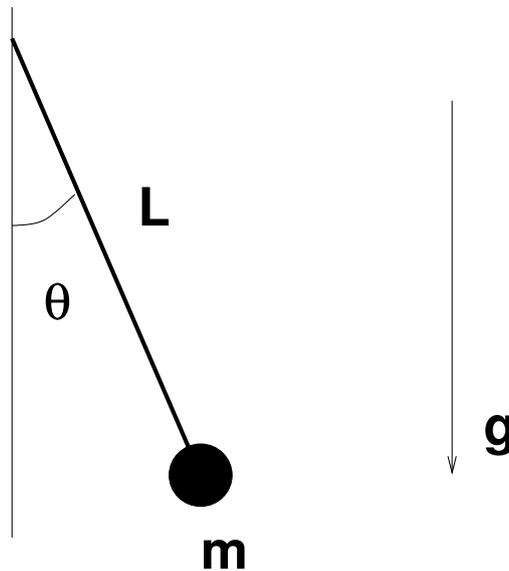
O fato de se conhecer os princípios básicos e as respectivas equações não quer dizer que o problema está resolvido. Mas é importante lembrar que estas equações continuam válidas mesmo que alguns detalhes do problema sejam nebulosos. Nesta seção, alguns problemas (modelos) serão analisados a partir de suas equações básicas.

### 3.1 Pêndulo simples

O pêndulo simples é um dos problemas mais conhecidos na física básica. A figura 6 mostra um diagrama esquemático do pêndulo simples. A palavra “simples” deve ser enfatizada. Este problema introdutório em cursos de físicas é uma idealização do problema real. Nesta idealização, os únicos parâmetros importantes são a massa do pêndulo, que neste modelo idealizado some, a aceleração da gravidade, que é constante, o comprimento do pêndulo e o ângulo inicial em que se solta o pêndulo. Nesta idealização, a dimensão da massa é desprezada e a única característica do fio é o seu comprimento que é constante. Efeitos como resistência do ar, elasticidade do fio, rotação da terra são desprezados. Se levados em conta, o problema é consideravelmente mais complexo.

#### 3.1.1 O que se pode desprezar

Mas não é tudo, outros fatores influenciam este problema como, por exemplo, a variação de  $g$  com a posição. No limite, até a dinâmica dos átomos do ar e a radiação solar



**Figura 6 – Pêndulo simples**

incidente interferem. Levando em conta tudo este problema não seria resolvido. Neste sentido, o mais importante é saber o que ignorar. Apenas os efeitos com as escalas corretas. Imaginemos que este pêndulo é uma esfera de aço com 1 cm de diâmetro. Se esta esfera refletir toda a luz incidente, a razão entre a força gerada pela pressão da luz do sol na terra e a força da gravidade vale (ordem de grandeza):

$$\frac{F_{sol}}{F_{grav}} \approx \frac{W''}{\rho D g c} \approx 5 \times 10^{-9}$$

onde  $W'' = 1360 \text{ W/m}^2$  é o fluxo de radiação solar. Com valores baixos como este, é fácil desprezar o efeito da radiação solar.

Por outro lado, se o pêndulo tiver velocidade típica da esfera for de 1 m/s e estiver no ar, a razão entre a força peso e a força de arrasto aerodinâmica vale:

$$\frac{F_{aero}}{F_{grav}} = \frac{3 \cdot C_D \rho_a V^2}{32 \cdot \rho D g} \approx 0,02\%$$

Este valor de 0,02% é pequeno mas seu efeito acumulado pode ser considerável (pêndulos param) e dependendo do que se deseja, deve ser incluído. No entanto, é importante observar que, por este valor ser pequeno, um modelo simples com incerteza alta para a força de arrasto geralmente é suficiente para a maioria dos problemas. Caso contrário

teria que se resolver o problema do escoamento ao redor da esfera, o que, como será visto adiante, não é um problema simples.

### 3.1.2 Modelo matemático simples

Com todas as simplificações anteriores, chega-se à equação do pêndulo simples:

$$m \cdot L^2 \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} + m \cdot g \cdot L \cdot \sin \theta = 0$$

com as seguintes condições de contorno:

$$t = 0 \quad \longrightarrow \quad \theta = \theta_0, \quad \frac{d\theta}{dt} = 0$$

Esta equação pode ser reescrita como:

$$\frac{L}{g} \frac{d^2\theta}{dt^2} + \sin \theta = 0$$

Definindo

$$t_* = \frac{t}{t_0} \quad \longrightarrow \quad \text{onde } t_0 = \sqrt{\frac{L}{g}}$$

chega-se à equação adimensional

$$\frac{d^2\theta}{dt_*^2} + \sin \theta = 0$$

Agora, sabendo  $\theta_0$  (condição de contorno inicial) resolvendo esta equação, está se resolvendo qualquer pêndulo simples. Quando  $\theta_0$  é pequeno,  $\sin \theta_0 \approx \theta_0$  e a equação diferencial é linearizada. Sua solução é simples e o período do pêndulo vale:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Partindo desta solução aproximada pode-se obter uma expressão para o problema não linear utilizando métodos assintóticos:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \cdot \varphi(\theta_0) = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \cdot \left[ \varphi(0) + \theta_0 \cdot \varphi'(0) + \frac{1}{2} \theta_0^2 \cdot \varphi'' + \dots \right]$$

o que se observa neste problema simples é que a formulação do problema simplificado (idealizado) exige a desprezar diferentes fenômenos físicos. Para tanto é necessário achar estimativas, mesmo que grosseiras, das diferentes influências. Uma vez que se simplificou o problema, pode-se fazer mais, utilizando análise dimensional, o que consiste basicamente em reescalar o problema. Neste ponto maiores simplificações são, algumas vezes, possíveis.

Uma outra maneira de enxergar este processo (análise dimensional) é considerar que pode-se escolher um outro sistema de unidades onde os coeficientes (neste caso  $\sqrt{L/g}$ ) valem 1.

## 3.2 Difusão de calor

### 3.2.1 Problema 3D

Neste caso, o problema é modelado por uma equação diferencial parcial. Vale ressaltar que para se chegar a esta equação diferencial, o problema já foi simplificado. O problema da difusão de calor linear é modelado pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \nabla^2 u$$

onde  $u$  é a temperatura e  $\alpha$  é o coeficiente de difusão de calor do material. Além disso, ainda faltam as condições de contorno. Quando o domínio é um cubo de lado  $L$  formado pelas faces  $x = 0, L$ ,  $y = 0, L$  e  $z = 0, L$  e as condições de contorno forem  $u = 0$  na face  $x = 0$ ,  $u = u_0$  e nas demais o fluxo de calor é nulo, ou seja, a derivada da temperatura em relação à normal da face é zero. A condição inicial é  $u = 0$ . O objetivo deste problema é obter  $u(x, y, z, t)$  para  $t > 0$ :

$$u = f(u_0, L, \alpha, x, y, z, t)$$

A equação fornece uma escala de dimensão  $L$  e escala de temperatura  $u_0$ . Estas escalas permitem definir novos parâmetros que na região de interesse possuem valores da ordem de 1:  $x_* = x \cdot L$ ,  $y_* = y \cdot L$ ,  $z_* = z \cdot L$ , e  $u_* = u \cdot u_0$ . Dentro do cubo, tanto as coordenadas  $(x_*, y_*, z_*)$  quanto a temperatura  $u_*$  possuem valores entre 0 e 1. Substituindo estas relações na equação diferencial temos:

$$\frac{\partial u_*}{\partial t} = \frac{\alpha}{L^2} \left( \frac{\partial^2 u_*}{\partial x_*^2} + \frac{\partial^2 u_*}{\partial y_*^2} + \frac{\partial^2 u_*}{\partial z_*^2} \right) = \frac{\alpha}{L^2} \nabla_*^2 u_*$$

Esta equação sugere uma escala de tempo:  $t = t_* \cdot t_0 = t_* \cdot \frac{L^2}{\alpha}$ . Substituindo esta relação na equação anterior chega-se à seguinte relação:

$$\frac{\partial u_*}{\partial t_*} = \nabla_* u_*$$

As condições de contorno são  $u_* = 0$  em  $x_* = 0$ ,  $u_* = 1$  em  $x_* = 1$  e nas demais faces o fluxo é zero:  $\partial u_*/\partial y_* = 0$  em  $z_* = 0, 1$  e  $\partial u_*/\partial z_* = 0$  em  $y_* = 0, 1$ .

As condições de contorno também se simplificam:  $u_* = 0$  em  $x_* = 0$ ,  $y_* = 0$ ,  $z_* = 0$ ,  $y_* = 1$ ,  $z_* = 1$  e  $u_* = 1$  em  $x_* = 1$ .

A solução deste novo problema é:

$$u = u_0 \cdot \varphi(t_*, x_*, y_*, z_*) = u_0 \cdot \varphi\left(\frac{t\alpha}{L^2}, \frac{x}{L}, \frac{y}{L}, \frac{z}{L}\right)$$

O problema original tinha 7 parâmetros e foi reduzido para 4, o que é um ganho substancial. Novamente, para este tipo de geometria e este tipo de condição de contorno, a solução deste problema adimensional vale para quaisquer valores de  $L$ ,  $\alpha$  e  $u_0$ . Outro aspecto interessante é que no domínio/tempo de interesse, todos os parâmetros são da ordem um,  $\mathcal{O}(1)$ .

### 3.2.2 Uma barra fina e comprida

Modificando o problema de modo que o domínio é um paralelepípedo com lados  $L_x = L$ ,  $L_y$  e  $L_z$ , onde  $L \gg L_x$  e  $L \gg L_y$ , as variações da temperatura nas direções  $y$  e  $z$  para  $x$  constante são desprezíveis e portanto a equação diferencial pode ser simplificada de modo que

$$u(x, y, z, t) = u(x, t)$$

e portanto

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Como na subseção anterior, chega-se a uma equação adimensional. Repetindo o procedimento da seção anterior, chega-se à seguinte equação adimensional:

$$\frac{\partial u_*}{\partial t_*} = \frac{\partial^2 u_*}{\partial x_*^2} \quad \longrightarrow \quad u = u_0 \cdot \varphi\left(\frac{t\alpha}{L^2}, \frac{x}{L}\right)$$

A solução deste problema com  $t \rightarrow \infty$  é a velha distribuição linear de temperatura:

$$u(x, \infty) \rightarrow \frac{x}{L} \cdot u_0$$

Mas nos outros instantes de tempo é necessário resolver a equação acima. Outras simplificações são possíveis quando  $L$  é muito grande ou quando  $t$  é muito pequeno.

### 3.2.3 Auto-semelhança: barra infinita

O que acontece se a barra for muito comprida (ou o logo no começo)? Neste caso, não existe uma escala de comprimento pré-definida. Assim esta escala deve sair do próprio problema. Ou seja, se  $L \rightarrow \infty$ , para que o tempo adimensional seja constante:

$$\frac{t\alpha}{L^2} = cte \rightarrow L = \sqrt{t\alpha} \rightarrow \eta = \frac{x}{L} = \frac{x}{\sqrt{\alpha t}} \rightarrow \frac{u}{u_0} = f(\eta)$$

Usando esta escala na equação diferencial parcial, chega-se à seguinte equação diferencial ordinária:

$$f''(\eta) + \frac{\eta}{2}f'(\eta) = 0$$

com condições de contorno

$$f(0) = 0 \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} f(\eta) = 1$$

Com esta mudança de variáveis, transformou-se uma equação diferencial parcial em uma equação diferencial ordinária, algo que é significativo. Neste caso, a solução analítica desta equação é simples:

$$f(\eta) = \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2}\right)$$

onde  $\operatorname{erf}$  é a função erro.

## 3.3 Escoamento incompressível ao redor de uma esfera

Os exemplos anteriores usaram modelos simples e/ou lineares para mostrar como as principais escalas de um problema permitem simplificar equações diferenciais. Nesta seção será analisado o escoamento ao redor de uma esfera. Admitindo um fluido newtoniano incompressível, chega-se às equações de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.1)$$

onde  $\mathbf{u}$  é o vetor velocidade,  $p$  é o campo de pressões,  $\nu$  é a viscosidade cinemática e  $\rho$  é a densidade do fluido. O problema do escoamento ao redor de uma esfera em um ambiente grande apresenta as seguintes condições de contorno:

$$r \longrightarrow \infty \quad \mathbf{u} \longrightarrow U_0 \hat{\mathbf{i}} \quad r = \frac{D}{2} \quad \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

a segunda condição anterior corresponde à aderência do fluido na parede da esfera. Estas condições de contorno fornecem uma escala para a velocidade  $U_0$  e uma escala para a dimensão  $D$  (o diâmetro da esfera). Seguindo o mesmo procedimento adotado para o problema de difusão, obtém-se os seguintes parâmetros para o problema:

$$x_* = \frac{x}{D}, \quad y_* = \frac{y}{D}, \quad z_* = \frac{z}{D}$$

$$\mathbf{u}_* = \frac{\mathbf{u}}{U_0}, \quad p_* = \frac{p}{P_0}, \quad t_* = \frac{t}{t_0} = \frac{tU_0}{D}$$

Observe que o parâmetro  $P_0$  ainda é desconhecido e será analisado mais adiante. Antes, porém, é interessante notar que não existe uma equação para a pressão e ela não aparece nas condições de contorno. Na verdade, a pressão ela aparece como resultado das equações de Navier-Stokes e seu valor é tal que a equação da continuidade ( $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ) é satisfeita. Usando as escalas corretas os parâmetros anteriores possuem valores com ordem de grandeza  $\mathcal{O}(1)$ . Isto pode parecer estranho a primeira vista já que o domínio se estendo ao infinito. No entanto as coisas mais relevantes acontecem perto da esfera. É neste sentido que  $x_*, y_*, z_* \sim 1$ . Um argumento semelhante pode ser utilizado para o tempo  $t_*$ . É lógico que o escoamento pode durar um intervalo de tempo grande (uma bola pode ficar durante dias dentro de um túnel de vento) mas o tempo que leva para uma partícula passar por perto da esfera corresponde a  $t_* \sim 1$ .

Com estes novos parâmetros, chega-se às equações de Navier-Stokes adimensionais:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_*}{\partial t_*} + \mathbf{u}_* \cdot \nabla_* \mathbf{u}_* = -\frac{P_0}{\rho U_0^2} \nabla_* p_* + \frac{1}{Re} \nabla_*^2 \mathbf{u}_* \quad \nabla_* \cdot \mathbf{u}_* = 0 \quad (3.2)$$

nestas equações,  $Re = \frac{U_0 D}{\nu}$  é o número de Reynolds e

$$\nabla_* = \frac{\partial}{\partial x_*} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y_*} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z_*} \hat{\mathbf{k}}$$

e as condições de contorno são:

$$r_* \longrightarrow \infty \quad \mathbf{u}_* \longrightarrow \hat{\mathbf{i}} \quad r_* = \frac{1}{2}, \mathbf{u}_* = \mathbf{0}$$

Como se observou para o pêndulo simples e a difusão de calor, introduzir as escalas principais do problema reduz o trabalho significativamente se originalmente

$$u = f(t, x, y, z, U_0, D, \nu, \rho)$$

Com esta análise dimensional, o problema se reduziu a

$$u = U_0 \varphi \left( \frac{tU_0}{D}, \frac{x}{D}, \frac{y}{D}, \frac{z}{D}, \frac{U_0 D}{\nu} \right)$$

Se antes, além do tempo e coordenadas, eram necessários resolver o problema para quatro parâmetros independentes ( $U_0$ ,  $D$ ,  $\nu$  e  $\rho$ ), agora, apenas o número de Reynolds é necessário. A economia de esforços é considerável, assim como a liberdade que se ganha: experimentos podem ser realizados em diferentes fluidos se  $Re$  for o mesmo.

Este resultado ó obtido na análise dimensional tradicional. No entanto é interessante lembrar que nesta formulação, cada termo  $u_*$  tem ordem de grandeza 1 por construção e aparecem dentro de derivadas. Dependendo das circunstâncias, estimativas relativas de cada termo desta equação podem ser feitas de modo a desprezar alguns termos e simplificar o problema.

### 3.4 Equações de Euler - $Re \longrightarrow \infty$

Uma aproximação de 3.2 que salta à vista é o limite

$$Re \longrightarrow \infty$$

Se admitirmos que o escoamento está em regime permanente (RP),  $\partial/\partial t = 0$ , obtém-se as equações de Euler:

$$\mathbf{u}_* \cdot \nabla_* \mathbf{u}_* = -\frac{P_0}{\rho U_0^2} \nabla_* p_* \quad (3.3)$$

por construção, o lado esquerdo desta equação tem ordem de grandeza 1. Para que o gradiente de pressão tenha, também, ordem de grandeza 1, é basta definir

$$P_0 = \rho U_0^2$$

A equação de Euler ainda possui o termo convectivo não linear mas já não é uma equação de segunda ordem. Isto tem consequências, principalmente perto da parede pois nas equações de Euler, a velocidade junto a parede não é nula. Mas longe da parede as equações de Euler podem ser representativas, principalmente se não houver separação.

### 3.5 Equação de Stokes

Um outro limite é quando  $Re \rightarrow 0$ . Neste caso não faz sentido empregar  $P_0 = \rho U_0^2$  que foi obtido admitindo  $Re$  grande. Novamente, considerando o escoamento em regime permanente e multiplicando ambos os lados da equação por  $Re$ ,

$$Re(\mathbf{u}_* \cdot \nabla_* \mathbf{u}_*) = -Re \frac{P_0}{\rho U_0^2} \nabla_* p_* + \nabla_*^2 \mathbf{u}_* \quad \nabla_* \cdot \mathbf{u}_* = 0$$

por construção, o termo convectivo tem ordem 1 e vai para zero. Infelizmente não se pode simplesmente desprezar o termo da pressão. Fazendo  $Re$  tender a zero mantendo  $D$ ,  $\rho$  e  $\nu$  fixos, o denominador  $\rho U_0^2$  vai para zero mais rapidamente que  $Re$  que está no numerador e portanto este termo não pode ser desprezado. No entanto uma nova escala para pressão surge. Se

$$Re \cdot \frac{P_0}{\rho U_0^2} = 1 \quad \longrightarrow \quad P_0 = \frac{\mu}{U_0} D$$

Com esta nova escala para a pressão, as equações de Stokes tomam a forma final

$$\nabla_* p_* + \nabla_*^2 \mathbf{u}_* = 0 \quad \nabla_* \cdot \mathbf{u}_* = 0 \quad (3.4)$$

Em geral, em um escoamento incompressível, a força de arrasto em um corpo é a soma de duas contribuições: a integral da pressão e a integral das tensões de cisalhamento na superfície do corpo. No caso da equação de Stokes, as forças devido à pressão apresentam a seguinte ordem de grandeza:

$$F_P \sim P_0 \cdot A \approx P_0 \cdot D^2 = \mu U_0 D$$

A tensão de cisalhamento pode ser estimada como  $\tau \sim \mu U_0/D$  de modo que

$$F_V \sim \tau \cdot A \approx \mu U_0 D$$

Assim, a força de arrasto deve valer:

$$F_D = k \cdot \mu U_0 D$$

onde  $k$  é uma constante que depende da geometria do corpo. Stokes obteve a seguinte relação para a força de arrasto em uma esfera:

$$F_D = 6\pi\mu U_0 D \quad (3.5)$$

É interessante observar que a equação de Stokes tem dois termos, um contendo a pressão o outro a velocidade de modo que existe um equilíbrio entre estes dois termos. Se um sobe localmente, o outro terá que subir imediatamente para manter o equilíbrio. Neste sentido o fato de que as estimativas  $F_P$  e  $F_V$  têm a mesma forma é esperado.

### 3.6 E Stokes para um cilindro infinito?

A princípio, a análise que foi feita para se obter a equação de Stokes para uma esfera poderia ser repetida para qualquer corpo. Não foi feita nenhuma hipótese quanto a geometria do corpo além de se impor uma escala dimensional. Entretanto quando tenta fazer a mesma análise para um cilindro muito longo, a equação de Stokes não tem solução. Este fato é conhecido como o *Paradoxo de Stokes* (BIRKHOFF, 1960). O melhor que se pode fazer é linearizar o termo convectivo, obtendo-se a seguinte equação:

$$Re \hat{\mathbf{i}} \cdot \nabla_* \mathbf{u}_* = -\nabla_* p_* + \nabla_*^2 \mathbf{u}_*$$

### 3.7 Velocidade variando ciclicamente

Até este ponto, admitiu-se que o escoamento estava em regime permanente. Assim, a escala de tempo é produto do próprio escoamento e suas escalas de velocidade ( $U_0$ ) e

dimensão ( $D$ ) com  $t_0 = D/U_0$ . No entanto, uma escala externa de tempo externa pode ser imposta se a velocidade ao longe valer

$$U_\infty = U_0 \cdot (1 + \epsilon_0 \cdot \cos \omega_0 t)$$

esta velocidade oscilante introduz uma nova escala de tempo  $t_1 = 1/\omega_0$ . Ao invés da escala de tempo  $t_0 = D/U_0$  esta nova escala de tempo for utilizada para se definir a  $t_*$ . Com isso a equação de Navier-Stokes adimensional tem a seguinte forma:

$$\Omega \frac{\partial \mathbf{u}_*}{\partial t_*} + \mathbf{u}_* \cdot \nabla_* \mathbf{u}_* = -\frac{P_0}{\rho U_0^2} \nabla_* p_* + \frac{1}{Re} \nabla_*^2 \mathbf{u}_* \quad \Omega = \frac{D\omega_0}{U_0} \quad (3.6)$$

Além de  $Re$ , um novo parâmetro aparece:  $\Omega$ . Este novo parâmetro nada mais é que a razão entre as duas escalas de tempo do problema:

$$\Omega = \frac{t_0}{t_1} = \frac{D\omega_0}{U_0}$$

Se a velocidade ao longe for uma expressão do tipo

$$U_\infty = U_0 \cdot \left( 1 + \sum_{k=0}^{N-1} \epsilon_k \cdot \cos \omega_k t \right)$$

novas escalas de tempo são introduzidas:  $1/\omega_1, 1/\omega_2, \dots, 1/\omega_{N-1}$ . Cada escala de tempo  $t_k = 1/\omega_k$  introduz um novo parâmetro adimensional  $\Omega_k = t_0/t_{k+1} = D\omega_k/U_0$ .

É interessante observar que se por um lado, um campo de velocidades variando ciclicamente com várias frequências parece algo exotérico, é isto o que acontece em um escoamento turbulento que tem um espectro contínuo que deve ser modelado. Além disso todas as três componentes de velocidade variam e estão correlacionadas entre si. Isto parece ser muito mais difícil de se simular experimentalmente (ou mesmo numericamente) mas na prática, se  $Re$  for alto o suficiente, basta gerar um escoamento com escala integral correta que um espectro padrão (Von Karman por exemplo) surge.

### 3.8 Esfera em uma base elástica

Esta é uma situação comum onde a esfera (ou outro corpo) não está fixo mas pode se mover em torno de um ponto. Este caso introduz uma nova equação. Além da dinâmica

do fluido externo ao corpo, é necessário modelar a dinâmica do próprio corpo. O modelo mais simples consiste em um sistema massa-mola-amortecedor de 1 grau de liberdade. Se o corpo tem uma massa  $m$  e a base tem rigidez  $k$ , a frequência natural introduz uma outra escala de tempo:

$$\frac{1}{t_2} = \omega_N = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \longrightarrow \quad t_* = \frac{t}{t_0} = t \cdot \frac{U_0}{D}$$

A razão entre as duas escalas de tempo é um novo parâmetro adimensional conhecido como velocidade reduzida:

$$V_R = \frac{t_2}{t_0} = \frac{U_0}{\omega_N \cdot D} \quad \text{Velocidade reduzida}$$

Na equação de Navier-Stokes pode-se escolher  $t_0$  ou  $t_2$  como escala de tempo. Escolhendo  $t_0$ , obtém-se a equação adimensional original (eq. 3.1):

$$\frac{\partial \mathbf{u}_*}{\partial t_*} + \mathbf{u}_* \cdot \nabla_* \mathbf{u}_* = -\frac{P_0}{\rho U_0^2} \nabla_* p_* + \frac{1}{Re} \nabla_*^2 \mathbf{u}_*$$

Ainda falta analisar a equação do oscilador:

$$y''(t) + 2\zeta\omega_N y'(t) + \omega_N^2 y(t) = \frac{F(y, y', t)}{m}$$

onde  $\zeta$  é a razão de amortecimento crítico e  $F$  é uma função que fornece as forças do fluido agindo na massa. Usando *as mesmas escalas de comprimento ( $D$ ) e de tempo  $t_0$*  esta equação pode ser reescrita como

$$\frac{d^2 y_*}{dt_*^2} + 2\frac{\zeta}{V_R} \frac{dy_*}{dt_*} + \frac{1}{V_R^2} y_* = \frac{\rho D^3}{m} \cdot \varphi(t_*, y_*, y'_*)$$

Nesta equação, além da velocidade reduzida ( $V_R$ ) aparece um outro adimensional  $\rho D^3/m$  que é a razão entre massa de fluido deslocado pela esfera e a massa da esfera. A força, por sua vez, foi obtida a partir de uma função adimensional  $\varphi$  multiplicada por uma força de referência - a pressão dinâmica vezes a área:  $\rho U_0^2 \times D^2 \varphi(t_*, y_*, y'_*)$ .

Naturalmente, poderia-se adimensionalizar a equação de Navier-Stokes utilizando a escala de tempo do oscilador  $t_2$ . Neste caso a equação de Navier-Stokes adimensional fica diferente

$$\frac{1}{V_R} \frac{\partial \mathbf{u}_*}{\partial t_*} + \mathbf{u}_* \cdot \nabla_* \mathbf{u}_* = -\frac{P_0}{\rho U_0^2} \nabla_* p_* + \frac{1}{Re} \nabla_*^2 \mathbf{u}_*$$

Esta equação é muito parecida com a equação obtida para o caso com a velocidade ao longe variando ciclicamente ( $V_R$  é muito parecido com  $1/\Omega$ ).

A equação do oscilador toma a seguinte forma:

$$\frac{d^2 y_*}{dt_*^2} + 2\zeta \frac{dy_*}{dt_*} + y_* = \frac{\rho D^3}{m} \cdot V_R^2 \cdot \varphi_1(t_*, y_*, y_*')$$

Como era de se esperar os mesmos parâmetros adimensionais  $V_R$ ,  $\rho D^3/m$  e  $Re$  aparecem.

### 3.9 Camada Limite quando $Re \rightarrow \infty$ e solução de Blasius para a placa plana

As equações de Euler foram obtidas desprezando o termo difusivo (viscoso) quando  $Re \rightarrow \infty$ . Como já foi visto, sabe-se que isso introduz uma dificuldade, conhecida como o paradoxo D'Alembert (BIRKHOFF, 1960). Este paradoxo só foi resolvido em 1904 quando L. Prantl introduziu o conceito de camada limite (BIRKHOFF, 1960). O problema é que utilizar a escala de comprimento  $D$  para se estimar o termo difusivo é inconsistente com a realidade: a mudança da velocidade de zero (na parede) até um valor alto da ordem de  $U_0$  ocorre em uma região muito pequena próxima à parede com dimensões características  $\delta$ , onde  $\delta \ll D$ , e portanto o gradiente de velocidade é elevado e o termo difusivo não pode ser simplesmente desprezado (nesta região próxima à parede). A espessura da camada limite  $\delta$  é uma outra escala do problema. Esta nova escala de comprimento é de natureza distinta da escala original  $D$  pois não é algo se enxerga imediatamente mas sim produto do próprio escoamento. Neste contexto, não é coincidência, então, que levou tanto tempo para alguém propor a teoria da camada limite. Muito do que se discutiu até este momento pode ser aplicado como um algoritmo mas introduzindo um pouco de física pode-se ir muito além.

#### 3.9.1 Estimativa da espessura da camada limite

As equações diferenciais já analisadas tinham variáveis dependentes (como velocidade, temperatura, etc) e variáveis independentes (coordenadas no espaço e tempo) e

parâmetros (viscosidade, etc). Assim, o procedimento adotado foi escolher escalas adequadas de modo a construir parâmetros adimensionais (variáveis com subíndice “\*”) que tivessem ordem de grandeza 1 na região de interesse. Um outro jeito de enxergar isso, é mudar o sistema de unidades de modo que as grandezas, neste novo sistema tenham valores próximos de 1. No caso do escoamento ao redor da esfera, isto consiste em utilizar um sistema de unidades onde o diâmetro da esfera tem valor numérico igual a 1 assim como a velocidade ao longe. Isto é o que se chama, tradicionalmente, de análise dimensional e será discutido mais adiante.

A vantagem de se adotar estas escalas como referência (ou mudar o sistema de unidades) é que fica fácil comparar diretamente as ordens de grandeza de cada termo da equação que modela o fenômeno e desprezar os termos pequenos. Isto pode ser sedutor mas sem cuidado (outro jeito de dizer “sem conhecer os fenômenos físicos relevantes”), pode-se chegar a problemas como o paradoxo de Stokes ou o paradoxo D’Alembert.

Mas por outro lado, conhecendo estas possíveis dificuldades novas escalas podem ser introduzidas de maneira apropriada. Em geral, o fato das variáveis dependentes e independentes tiverem, por construção valores de ordem 1, sugere uma outra abordagem. Como exemplo, seja a derivada no espaço da velocidade:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{U_0}{D} \frac{\partial u_*}{x_*} \sim \frac{U_0}{D}$$

a última expressão reflete o fato de que a velocidade varia entre valores da ordem de  $U_0$  e 0 em regiões com ordem de grandeza  $D$ . Naturalmente, como já foi observado, existem situações onde estas estimativas estão completamente fora como por exemplo na camada limite onde a mesma variação de velocidade (de zero a algo da ordem de  $U_0$ ) ocorrerá em uma região muito menor (da ordem da espessura da camada limite  $\delta$ ). Mas mesmo neste caso, nesta família de problemas, a razão  $D/\delta \sim \gamma$  é mais ou menos constante.

Voltando à equação de Navier-Stokes, estas estimativas podem ser empregadas diretamente:

$$\mathcal{O}\left(\frac{U_0^2}{D}\right) + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (3.7)$$

$$\mathcal{O}\left(\frac{U_0^2}{D}\right) \quad \mathcal{O}\left(\frac{U_0^2}{D}\right) \quad \mathcal{O}\left(\frac{U_0^2}{D}\right) \quad \cancel{\mathcal{O}\left(\frac{\nu U_0}{D^2}\right)} \quad \mathcal{O}\left(\frac{\nu U_0}{\delta^2}\right)$$

onde a estimativa já obtida  $P \sim \rho U_0^2$  foi utilizada. A primeira reação é, se  $Re$  for alto, desprezar o termo difusivo. Mas como sabemos que este termo é importante, pelo menos

em uma região do escoamento, nesta região, este termo deve ter *pelos menos a mesma ordem de grandeza que os outros termos da equação*. O problema não está na estimativa da variação da velocidade e sim na distância onde esta variação ocorre que foi chamada de  $\delta$ . É importante realçar que esta estimativa para o termo difusivo é apenas o pior caso. Fora da camada limite, este termo é desprezível o que quer dizer que *a soma dos outros termos é nula*, apesar de que a estimativa da ordem de grandeza de cada termo seja  $U_0^2/D$ . Em um caso mais geral, a soma dos outros termos da equação poderiam cancelar em maior ou menor grau resultando em diferentes estimativas da ordem de grandeza deste termo.

Tendo isso em mente, pode-se chegar a uma estimativa da ordem de grandeza da espessura da camada limite:

$$\frac{U_0^2}{D} \sim \nu \frac{U_0}{\delta^2}$$

admitindo que não há cancelamento na soma dos outros termos da equação. Com esta hipótese, esta relação permite obter-se uma estimativa para a escala de comprimento da espessura da camada limite:

$$\frac{U_0^2}{D} \sim \nu \frac{U_0}{\delta^2} \quad \longrightarrow \quad \frac{\delta}{D} \sim \sqrt{\frac{1}{Re}} \quad (3.8)$$

Esta expressão é consistente com a solução de Blasius para a camada limite laminar (TRITTON, 1988).

### 3.9.2 A camada limite na placa plana

Este tipo de análise pode ser levada mais adiante. Um problema mais simples é o escoamento em uma placa plana que pode ser visto na figura 7 onde a vista foi explodida na direção  $y$  de modo que  $\delta_* = \delta/L \ll 1$  onde ao invés do diâmetro  $D$  da esfera, utiliza-se como escala o comprimento da placa  $L$ . Repetindo o que se foi feito nas seções anteriores, as escalas  $U_0$  e  $L$  são utilizadas para se definir  $U_*$  e  $x_*$ . Mas no caso da direção  $y$ , outra escala é empregada:  $y_* = y/\delta$  onde  $\delta$  é a espessura da camada limite ainda não conhecida.

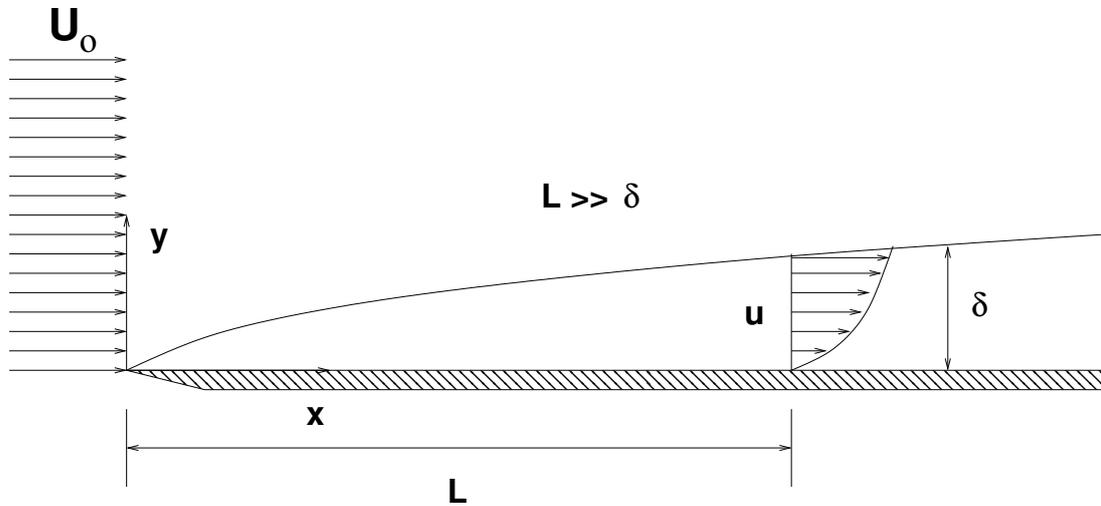


Figura 7 – Camada limite em uma placa plana

Assim, as equações de Navier-Stokes, em regime permanente, tomam a seguinte forma:

$$u_* \frac{\partial u_*}{\partial x_*} + v_* \frac{\partial u_*}{\partial y_*} = -\frac{\partial p_*}{\partial x_*} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u_*}{\partial x_*^2} + \frac{\partial^2 u_*}{\partial y_*^2} \right) \quad (3.9)$$

$$u_* \frac{\partial v_*}{\partial x_*} + v_* \frac{\partial v_*}{\partial y_*} = -\frac{\partial p_*}{\partial y_*} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v_*}{\partial x_*^2} + \frac{\partial^2 v_*}{\partial y_*^2} \right) \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial u_*}{\partial x_*} + \frac{\partial v_*}{\partial y_*} = 0 \quad (3.11)$$

$$(3.12)$$

A partir das principais escalas do problema, pode-se obter uma estimativa da ordem de grandeza de cada termo das equações anteriores. Para a equação de Navier-Stokes na direção  $x$  temos:

$$u_* \frac{\partial u_*}{\partial x_*} + v_* \frac{\partial u_*}{\partial y_*} = -\frac{\partial p_*}{\partial x_*} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u_*}{\partial x_*^2} + \frac{\partial^2 u_*}{\partial y_*^2} \right)$$

$$1 \quad \frac{1}{1} \quad \delta^* \quad \frac{1}{\delta^*} \quad ? \quad ? \quad 1 \quad \frac{1}{\delta_*^2}$$

nesta equação o único termo que pode ser desprezado é o termo difusivo em  $x$   $\frac{\partial^2 u_*}{\partial x_*^2}$ . Pode não parecer muito mas isto simplifica o problema de uma maneira fundamental. A equação diferencial que originalmente era elíptica agora se torna parabólica! Mas ainda não temos uma estimativa para  $Re$ . Lembrando que na camada limite este termo é importante, é preciso que este termo tenha uma ordem de grandeza pelo menos igual ao resto da equação:

$$\frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_*}{\partial x_*^2} \sim 1 \quad \rightarrow \quad Re \sim \frac{1}{\delta_*^2}$$

(novamente, este é a maior estimativa nesta equação mas em geral os outros termos podem se cancelar).

Já a equação na direção  $y$  muda significativamente:

$$u_* \frac{\partial v_*}{\partial x_*} + v_* \frac{\partial v_*}{\partial y_*} = -\frac{\partial p_*}{\partial y_*} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v_*}{\partial x_*^2} + \frac{\partial^2 v_*}{\partial y_*^2} \right)$$

$$1 \quad \delta_* \quad \delta_* \quad 1 \quad ? \quad \delta_*^2 \quad \delta_* \quad \frac{1}{\delta_*}$$

de modo que

$$\frac{\partial p_*}{\partial y_*} = \mathcal{O}(\delta_*) \approx 0$$

isto quer dizer que a pressão não varia ao longo da espessura da camada limite, ou seja, a pressão em uma dada posição  $x$  assume o valor da pressão na região fora da camada limite. Assim, nesta aproximação, a pressão é mais um parâmetro externo, um tipo de condição de contorno:

$$p_* = p_*(x)$$

Esta equação será resolvida para o caso mais simples, quando não há gradiente de pressão.

### 3.9.3 A solução de Blasius

Existe um sutileza na análise da camada limite apresentada até agora. Será que a escala  $\delta$  é realmente apropriada? Ao final do comprimento  $L$ , esta análise é consistente. Mas e para  $x < L$ ? Se o escoamento tem algo a ver com o que se vê na figura 7 claramente  $\delta = \delta(x)$ , ou seja,  $\delta$  é uma escala local que varia ao longo do escoamento. É aí que o fato da equação diferencial ser parabólica se torna importante. A escoamento só depende do que veio antes, sua história.

Para usar uma notação mais usual encontrada na literatura pode-se definir:

$$y_* = \frac{y}{\delta} = \frac{y}{\delta(x)} = \eta$$

Assim o campo de velocidade é dado por

$$\frac{u}{U_0} = g \left[ \frac{y}{\delta(x)} \right] = g(\eta)$$

nesta equação está se admitindo uma hipótese importante: o perfil de velocidade não muda com  $x$ , exceto por um fator de escala. Está se admitindo que existe autosemelhança. É mais simples trabalhar com a função corrente

$$\psi = U_0 \delta(x) f(\eta) \quad \frac{u}{U_0} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = f'(\eta) = g(\eta) \quad \frac{v}{U_0} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{d\delta}{dx} (\eta f' - f)$$

Falta, agora, determinar a função  $\delta(x)$  a ser utilizada nesta equação. Uma estimativa para esta espessura foi obtida na equação 3.8. Definindo

$$\frac{\delta(x)}{x} = \sqrt{\frac{2}{Re_x}} \quad \rightarrow \quad \delta(x) = \sqrt{\frac{\nu x}{U_0}} \quad (3.13)$$

onde o fator (2) é convencional e aparece em boa parte da literatura mas de maneira nenhuma necessário - estamos falando em ordem de grandeza afinal. Estas relações podem ser substituídas nas equações anteriores para se chegar à equação diferencial final.

Por outro lado, mesmo sem conhecer uma estimativa para  $\delta(x)$ , a relação anterior pode ser obtida postulando autosemelhança. Substituindo as expressões com  $\delta(x)$  na equação da camada limite, lembrando que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -U_0 \eta f'' \frac{d\delta}{dx}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{U_0 \cdot f''}{\delta}, \quad \frac{U_0 \cdot f'''}{\delta^2}$$

chega-se à seguinte equação:

$$\frac{U_0^2}{\delta} \frac{d\delta}{dx} f f'' + \frac{\nu U_0}{\delta^2} f''' = 0$$

Para que a solução seja auto-semelhante, a equação acima não pode depender diretamente de  $x$  de modo que

$$\frac{U_0^2}{\delta} \frac{d\delta}{dx} \propto \frac{\nu U_0}{\delta^2} \quad \rightarrow \quad \delta^2 \propto \frac{\nu x}{U_0} + const \quad \rightarrow \quad \delta = \sqrt{\frac{2\nu x}{U_0}}$$

onde o fator (2) na última expressão é utilizado por uma questão de conveniência. Esta é, como esperado, a mesma expressão para  $\delta(x)$  obtida utilizando a escala da equação 3.13. Assim, chegamos à equação de Blasius:

$$f f'' + f''' = 0$$

com as seguintes condições de contorno:

$$f = f' = 0 \quad \text{em} \quad \eta = 0$$

$$f' \rightarrow 1 \quad \text{quando} \quad \eta \rightarrow \infty$$

É interessante notar que a expressão de  $\delta$  nas equações acima é, fora o fator numérico  $\sqrt{2}$  o mesmo que obtivemos na equação 3.8:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{1}{x} \cdot \sqrt{\frac{2\nu x}{U_0}} = \sqrt{\frac{2}{Re_x}}$$

onde ao invés de  $Re$  (definido com a escala de comprimento  $L$ ) temos  $Re_x$  (definido com a escala de comprimento  $x$ ). Aqui se pode perceber um problema: o que acontece quando  $x \rightarrow 0$ ? Existe uma singularidade nesta situação mas isto é consistente com as hipóteses básicas da teoria da camada limite onde existem duas escalas muito distintas. Quando  $x$  é muito pequeno, esta hipótese deixa de ser válida e a equação da camada limite não representa bem o fenômeno e deve ser descartada. Nesta região, outro modelo deve ser utilizado.

### 3.10 Será que o problema da esfera já está resolvido?

Diferentes aspectos do escoamento ao redor de uma esfera foram considerados mas a lista considerável de outros fatores podem influenciar no fenômeno que podem, eventualmente, ser importantes. Também não se pode esquecer que mesmo um fenômeno complexo como o escoamento ao redor de uma esfera já é uma simplificação considerável.

Nenhuma esfera é uma esfera de verdade. Como entra a rugosidade? A crise do arrasto mostra que um parâmetro pequeno (rugosidade) pode ter um efeito drástico no escoamento em algumas circunstâncias. Nenhuma esfera está isolada: sempre existem paredes que podem influenciar mais ou menos o escoamento. Mesmo quando o modelo simplificado inicial não é o suficiente, pode servir como uma referência. Além disso sempre existe alguma compressibilidade que à medida que a velocidade aumenta vai ter uma importância maior. Não estamos nem falando de outros fenômenos como transferência de calor ou efeitos moleculares.

### 3.11 Semelhança

Uma situação comum é realizar testes com modelos em escala reduzida. Mas, agora, qual a relação entre as grandezas no modelo em escala com o protótipo? Na metodologia

apresentada até este ponto isto é simples: enquanto as escalas forem definidas de maneira consistente, as equações adimensionais (variáveis e operadores com sub-índice “\*”) são invariantes enquanto os parâmetros adimensionais forem os mesmos. No caso do escoamento ao redor de uma esfera, é necessário que a seguinte igualdade seja satisfeita:

$$Re_m = Re_p$$

onde  $m$  se refere a modelo e  $p$  se refere a protótipo. Se  $\lambda_D = D_m/D_p$ ,  $\lambda_U = U_m/U_p$  e  $\lambda_\nu = \nu_m/\nu_p$ , a igualdade do número de Reynolds necessita da seguinte relação entre escalas:

$$\lambda_U \cdot \lambda_D = \lambda_\nu$$

Se esta esfera estiver em uma base elástica, outros parâmetros como a velocidade reduzida  $V_R = U_0/(\omega_N \cdot D)$  e a razão de massa  $\rho D^3/m$  (as escalas de velocidade, comprimento e viscosidade respectivamente) devem ser iguais no modelo e no protótipo.

Se estes parâmetros e as condições de contorno forem as mesmas no modelo e no protótipo, as mesmas equações são satisfeitas e têm, portanto a mesma solução. Isto é válido enquanto o modelo matemático utilizado for válido. Mas cuidado, muitas vezes efeitos de escala aparecem como por exemplo rugosidade. Se o modelo e o protótipo tiver o mesmo tipo de acabamento com mesma rugosidade, o modelo terá efetivamente uma rugosidade maior e isto pode ser importante. Outra dificuldade comum são folgas pequenas que são difíceis de serem reproduzidas em um modelo em escala reduzida.

## 4 Será que podemos simplificar este processo?

Até este momento as equações básicas de um fenômeno e as principais escalas do problema foram utilizadas para se “simplificar” o problema. Cada fenômeno é caracterizado pelas seguintes grandezas:

- *Variáveis independentes.* Variáveis como a posição ( $x$ ,  $y$  e  $z$ ) ou tempo.
- *Variáveis dependentes.* Geralmente a grandeza que se deseja calcular como por exemplo velocidade e pressão no caso do escoamento incompressível, temperatura no problema de difusão de calor e ângulo no pêndulo simples.
- *Parâmetros.* Geralmente dimensões características e propriedades materiais como viscosidade ou densidade.

### 4.1 Ordem de grandeza de cada termo de uma equação diferencial

Utilizando as principais escalas do fenômeno, transformam-se as variáveis dependentes e independentes de modo que tenham valores com ordem de grandeza  $\mathcal{O}(1)$  (variáveis com sub-índice  $*$ ). Analisemos novamente a equação de Navier-Stokes para a esfera:

$$\frac{U_0^2}{D} \frac{\partial \mathbf{u}_*}{\partial t_*} + \frac{U_0^2}{D} \mathbf{u} \cdot \nabla_* \mathbf{u} = -\frac{U_0^2}{D} \nabla_* p + \frac{U_0 \nu}{D^2} \nabla_*^2 \mathbf{u}_* \quad (4.1)$$

Por construção, cada fator envolvendo variáveis dependentes e suas derivadas têm ordem de grandeza 1. Por exemplo, uma derivada pode ser representada como

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{U_0}{D} \cdot \frac{\partial u_*}{\partial x_*} = \mathcal{O}\left(\frac{U_0}{D}\right)$$

A equação de Navier-Stokes apresenta uma relação entre diferentes termos de modo que se um termo aumenta, os outros termos devem variar para que a equação continue sendo satisfeita.

Como se viu na região da camada limite, algumas vezes, estas estimativas estão erradas. Mas isto simplesmente significa que o termo não deve ser desprezado e para que o termo seja importante deve ter, pelo menos, a mesma ordem de grandeza que o resto da equação e portanto, existe um fator multiplicativo  $\gamma$  que corrige a estimativa obtida e este fator varia lentamente:

$$\frac{U_0^2}{D} \sim \gamma \cdot \frac{U_0 \nu}{D^2} \quad \rightarrow \quad \gamma = \mathcal{O}\left(\frac{U_0 D}{\nu}\right)$$

## 4.2 Usando diretamente os princípios da física com estimativas de ordem de grandeza

As equações diferenciais que modelam um fenômeno são resultado de algum princípio físico. A equação de Navier-Stokes, por exemplo, é aplicação direta da Segunda lei de Newton. O lado esquerdo desta equação representa a aceleração e o lado direito as forças atuando no fluido. Com as estimativas das forças e os princípios básicos da física, pode-se simplificar a análise de semelhança.

Voltemos ao exemplo de uma esfera em uma base elástica mas foquemos na dinâmica da esfera e não do fluido. Na esfera estão atuando as seguintes forças:

- $F_E$  - Forças elásticas da mola:  $F_E \sim k \cdot D$  ( $k$  é a constante da mola)
- $F_V$  - Forças viscosas:  $F_V \sim \tau_v \cdot A = \mu U_0 / D \cdot D^2$  ( $\tau_v$  é a estimativa da tensão viscosa e  $A$  é estimativa da área superficial da esfera)
- $F_P$  - Forças devido a pressão:  $F_P = \tau_P \cdot A = \rho U_0^2 D^2$  ( $\tau_P$  é a estimativa da tensão devido a pressão)

O resultado da ação destas forças é a massa  $\times$  aceleração que pode ser estimado por  $mU_0^2/D$ . Assim a segunda lei de Newton pode ser aplicada:

$$ma = \sum_i F_i \quad \rightarrow \quad \mathcal{O}\left(m \frac{U_0^2}{D}\right) = \mathcal{O}(k \cdot D) + \mathcal{O}(\rho U_0^2 D^2) + \mathcal{O}(\mu U_0 D)$$

O que foi feito na relação acima foi suprimir os termos envolvendo variáveis com sub-índice “\*” supondo que estas termos têm ordem de grandeza 1. Os parâmetros adimensionais surgem quando se compara a grandeza relativa de cada termo. Na equação acima, dividindo todos os termos por  $\rho U_0^2 D^2$ , temos

$$\mathcal{O}\left(\frac{m}{\rho D^3}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{k}{\rho U_0^2 D}\right) + \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}\left(\frac{\mu}{\rho U_0 D}\right)$$

Nesta expressão aparecem a razão entre massas  $\rho D^3/m$  e o número de Reynolds. Caso a equação seja dividida por  $m U_0^2/D$  a seguinte relação aparece:

$$\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}\left(\frac{\omega_N^2 D^2}{U_0^2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{\rho D^3}{m}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{\mu D^2}{m U_0}\right)$$

o primeiro termo do lado direito nada mais é que  $1/V_R^2$ . Todas estas grandezas adimensionais podem ser escritas como produto de potências dos seguintes adimensionais:

$$\frac{\rho U_0 D}{\mu} \quad \frac{\rho D^3}{m} \quad \frac{U_0}{\omega_N D}$$

Este processo pode ser repetido utilizando qualquer princípio básico da física como as leis da termodinâmica, princípios de transferência de calor. A idéia básica aqui é comparar os diferentes termos das equações básicas a partir de estimativas básicas de ordem de grandeza. O fato destas grandezas muitas vezes estarem erradas (como no caso da camada limite) não introduz maiores complicações: o número de Reynolds continua aparecendo. Esta metodologia é simplesmente um algoritmo que sistematiza o que foi feito até o momento mas sem construir diretamente as equações diferenciais.

# 5 Análise dimensional

Finalmente, a Análise Dimensional tradicional será abordada. A abordagem aqui foi retirada de Barenblatt (1996) e Barenblatt (2003). Começaremos com uma visão global para depois entrar nos detalhes sobre unidades, sistemas de unidades, o teorema dos  $\Pi$ s de Buckingham.

## 5.1 Escoamento viscoso ao redor de uma esfera

A gênese da análise dimensional e o teorema dos  $\Pi$ s de Buckingham é o fato de que as leis físicas não deveriam depender do sistema de unidades. Falaremos em maiores detalhes sobre unidades e sistemas de unidades mas para começar utilizaremos as idéias que qualquer um lendo este texto até aqui tem (ou deveria ter...).

Voltemos ao nosso velho problema de determinar a força de arrasto em uma esfera. A partir das equações diferenciais para o escoamento viscoso incompressível, sabemos que a força de arrasto depende de algumas grandezas:

$$F = F(U, D, \rho, \mu)$$

Cada grandeza acima, tem uma unidade associada. No sistema internacional estas unidades são:

- $F$  - força de arrasto,  $N = kg \cdot m/s^2$
- $U$  - Velocidade da esfera,  $m/s$
- $D$  - diâmetro da esfera,  $m$
- $\rho$  - massa específica do fluido,  $kg/m^3$
- $\mu$  viscosidade do fluido,  $Pa \cdot s = kg/(m \cdot s)$

Podemos mudar as unidades utilizadas. Assim, se mudarmos a unidade de comprimento para  $mm$  por exemplo, os valores numéricos dos parâmetros acima mudarão correspondentemente:

- $D \longrightarrow L \cdot D$
- $U \longrightarrow L \cdot U$
- $\rho \longrightarrow \rho/L^3$
- $\mu \longrightarrow \mu/L$
- $F \longrightarrow L \cdot F$

onde  $L = 1000$  é o fator de conversão de  $m$  para  $mm$ . Outra maneira de se enxergar isso é considerar  $L$  como o fator pelo qual se deve reduzir o comprimento de  $1 m$  para se obter  $1 mm$ .

O mesmo processo pode ser feito com os outros parâmetros mas com uma complicação: os outros parâmetros possuem unidades derivadas. A unidade de velocidade  $U$  em SI é  $m/s$ , depende da unidade de comprimento e da unidade de tempo. A densidade depende da unidade de massa e da unidade de comprimento. Da mesma maneira, a unidade de força, assim como a unidade de viscosidade, dependem da unidade de massa, comprimento e tempo. Cada uma destas unidades básicas (comprimento, massa e tempo) podem ser variadas de maneira independente. Assim, se a unidade de comprimento for reduzida por um multiplicador  $L$ , a de massa por um multiplicador  $M$  e o tempo por um multiplicador  $T$ , os valores numéricos dos parâmetros  $U$ ,  $D$ ,  $\rho$ ,  $\mu$  e  $F$  variam da seguinte maneira:

- $D' \longrightarrow (L) \cdot D$
- $U' \longrightarrow (L/T) \cdot U$
- $\rho' \longrightarrow (M/L^3) \cdot \rho$
- $\mu' \longrightarrow \{M/(L \cdot T)\} \cdot \mu$
- $F' \longrightarrow (M \cdot L/T^2) \cdot F$

Os números entre parênteses ( $L$  e  $L/T$  por exemplo) é conhecido na literatura de dimensão de uma grandeza. O que vamos fazer agora, é escolher um sistema de unidades específico e conveniente para nosso problema. Este sistema de unidades específico será construído de modo que neste novo sistema, *numericamente*,  $D' = U' = \rho' = 1$ .

Para o comprimento,

$$L \cdot D = 1 \quad \longrightarrow \quad L = \frac{1}{D}$$

Já para a velocidade,

$$\frac{L}{T} \cdot U = 1 \quad \longrightarrow \quad T = \frac{U}{D}$$

para a densidade,

$$\frac{M}{L^3} \cdot \rho = 1 \quad \longrightarrow \quad M = \frac{1}{\rho D^3}$$

Agora, não podemos especificar de maneira independente as unidades de  $F$  e  $\mu$  que tomam os seguintes valores:

$$\frac{M}{L \cdot T} \cdot \mu = \frac{\mu}{\rho U D} = \frac{1}{Re}$$

e

$$\frac{M \cdot L}{T^2} \cdot F = \frac{F}{\rho D^2 U^2} = C_D$$

Observe que estas grandezas  $1/Re$  ou  $C_D$  são, respectivamente o valor da viscosidade e o valor da força no sistema de unidades onde, *numericamente*,  $D = U = \rho$ . Mas mais interessante é o fato de que estas grandezas ( $Re$  e  $C_D$ ) não mudam com o sistema de unidades:

$$Re' = \frac{\rho' U' D'}{\mu'} = \frac{\rho(M/L^3) \cdot U(L/T) \cdot D(L)}{\mu M/(L \cdot T)} = \frac{\rho U D}{\mu} = Re$$

$$C'_D = \frac{F'}{\rho' D'^2 U'^2} = \frac{F(M \cdot L/T^2)}{\rho(M/L^3) \cdot D^2(L^2) \cdot U^2(L^2/T^2)} = \frac{F}{\rho D^2 U^2} = C_D$$

Estas grandezas são conhecidas como grandezas adimensionais.

Neste novo sistema de unidades, a relação original proposta para a força de arrasto, apresenta os seguintes valores numéricos:

$$\frac{F}{\rho D^2 U^2} = F \left( 1, 1, 1, \frac{1}{Re} \right)$$

Observe que este novo sistema de unidades, *muda com o valor de cada parâmetro*, temos uma relação mais simples:

$$C_D = C_D(Re)$$

mesmo resultado obtido a partir das equações de Navier-Stokes!

O leitor distraído pode achar que isso é *matemágica* mas a justificativa é simples. A unidade SI para velocidade é  $m/s$ , esta relação é resultado de uma definição:

$$U = \frac{L}{t}$$

esta definição de velocidade quer dizer que a uma velocidade constante  $U$ , um comprimento  $L$  é percorrido em um intervalo de tempo  $t$ . É interessante observar que muitas vezes estas definições básicas são utilizadas para se medir diretamente a grandeza mas outras grandezas podem ser mais convenientes. Quando um tubo de Pitot estático é usado para medir a velocidade de um fluido, a equação de Bernoulli é empregada. Esta equação é obtida a partir de manipulação e simplificações da equação de Navier-Stokes. Por outro lado, sistemas de medição como o PIV (*Particle Image Velocimetry*) usam diretamente a definição acima para medir velocidade.

A unidade de força  $N = kg \cdot m/s^2$  também vem de uma lei física, a segunda lei de Newton:

$$F = ma = m \frac{dv}{dt}$$

e isso mostra que a força é uma relação entre variação de velocidade e tempo. A unidade de força é, então, resultado de uma lei física bem estabelecida. Mas o que é a equação de Navier-Stokes? Nada mais que a *aplicação da segunda lei de Newton para um fluido Newtoniano* onde a relação entre tensão de cisalhamento e deformação é dada por uma relação linear (fluido Newtoniano). Para este tipo de fluido, a viscosidade é derivada desta relação linear. Um gradiente de velocidade resulta numa tensão de cisalhamento:

$$\tau = \mu \frac{dU}{dy}$$

mas a tensão de cisalhamento nada mais é que uma força superficial dividida pela área:

$$\tau = \frac{F}{A} = \frac{F}{L^2}$$

O que temos é um conjunto de leis físicas e definições que amarram as grandezas básicas. Podemos partir das equações básicas como fizemos com as equações de Navier-Stokes ou de parâmetros gerais que descrevem o problema como foi mostrado aqui. Esta é uma abordagem abstrata, que implicitamente carrega as equações do problema. Quando falamos que  $F = F(D, U, \rho, \mu)$  estamos implicitamente introduzindo as definições da cinemática, a segunda lei de Newton e a definição de fluido Newtoniano. Também estamos restringindo fluido a um fluido incompressível: como varia a densidade com a pressão? A ausência de qualquer parâmetro caracterizando isso implica em que o fluido é incompressível. Se o fluido for um fluido perfeito apareceriam outros parâmetros adimensionais:  $M = U/c$  que é o número de Mach (razão entre uma velocidade e a velocidade do som no fluido - aí temos uma relação entre pressão e densidade!) e o coeficiente isoentrópico  $\gamma$ . Um fluido real introduziria novos parâmetros (seja pela equação de estado ou pelo eventual fato do fluido não ser Newtoniano).

Assim, o que fizemos aqui foi empregar os princípios usados para se obter as equações diferenciais do escoamento ao redor de uma esfera de maneira mais abstrata. Esta abordagem abstrata tem vantagens - não precisamos nos preocupar com os detalhes de equações complexas, mas teríamos que postular que  $F = F(U, D, \rho, \mu)$ . Caso a velocidade fosse alta, compressibilidade seria importante. Em líquidos cavitação pode ocorrer. E não podemos esquecer de imperfeições geométricas (rugosidade, esfericidade por exemplo) ou possíveis deformações da esfera. É fácil esquecer algum parâmetro relevante ou introduzir parâmetros a mais.

É importante ter uma coisa em mente. Na análise dimensional estamos usando nosso conhecimento prévio de um problema para se chegar numa simplificação. Não é possível criar uma “nova física” com análise dimensional mas ela é a ferramenta mais simples para se simplificar e formular problemas.

O famoso teorema dos IIs de Buckingham não é nada além de uma aplicação sistemática do que fizemos acima. Para se chegar a este resultado, iremos explorar mais o que é unidade, sistema de unidades e classe de unidades.

## 5.2 Formulação do problema: constantes, variáveis e parâmetros

Qualquer fenômeno físico, em geral, pode ser formulado da seguinte maneira:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0$$

onde  $x_1, \dots, x_N$  são grandezas que podem ser escalares, vetores ou tensores e  $f$  é uma função que pode ser escalar, vetorial, etc. As grandezas  $x_i$  podem ser divididas em variáveis, parâmetros e constantes.

Constantes são grandezas cujo valor é fixo variando eventualmente com o sistema de unidades. Exemplos de constantes são a velocidade da luz no vácuo, a carga elétrica do elétron, ou a constante universal da gravitação.

Parâmetros são grandezas fixas para um determinado problema. A aceleração da gravidade é um exemplo. Já as variáveis são as grandezas que variam em um dado problema. Elas podem ser divididas entre variáveis independentes e variáveis dependentes. As variáveis independentes podem ser variadas de maneira independentes mas as variáveis dependentes são resultado pelo processo.

A função  $f$  estabelece a relação entre grandezas. Pode ser um sistema de equações algébricas, uma equação integral, uma equação diferencial parcial ou até mesmo um experimento.

É importante ressaltar estas definições são arbitrárias. É difícil não ver a velocidade da luz como uma constante mas e a aceleração da gravidade? Certamente um terraplanista considera a aceleração da gravidade uma constante. Mas ela varia um pouco com a latitude e altura e varia drasticamente com o planeta mas se a localização for fixa e as escalas de comprimento forem pequenas (comparadas com o planeta) não seria razoável considerar  $g$  uma constante? Mas assim mesmo as variáveis podem ser consideradas constantes. Imaginemos que estamos estudando bombas centrífugas. Uma das variáveis é o diâmetro do rotor. Mas podemos estar interessados em um rotor específico assim este diâmetro pode deixar ser visto como um parâmetro ou constante pois no contexto específico seu valor é constante.

Uma outra formulação possível, que em geral adotaremos é:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

Nesta formulação,  $x_1, \dots, x_N$  são constantes, parâmetros e variáveis independentes e  $y$  é uma variável dependente. Em geral esta formulação será usada e a distinção entre constantes, parâmetros e variáveis será feita quando necessário.

### 5.3 Dimensões e Unidades e Grandezas Adimensionais

Quando se fala que uma pessoa tem 1,82 m de altura, o que se quer dizer é que a altura desta pessoa é 1,82 vezes a altura de uma barra padrão armazenada no BIPM (Bureau International des Poids e Mesures) que se convencionou chamar de 1 m. Analogamente se esta mesma pessoa tem 90 kg de massa, isto quer dizer que a massa desta pessoa é 90 vezes a massa de um corpo armazenado no BIPM (hoje isso é mais curiosidade histórica como veremos). Estas são *unidades fundamentais*.

Existem outras medidas que são um pouco diferentes, velocidade por exemplo. Uma bicicleta tipicamente se locomove a 15 km/h. Se esta velocidade permanecer constante, a bicicleta se locomove 15 km durante um período de uma hora. Observe que esta unidade envolve duas outras: uma de espaço e outra de tempo. Esta é uma *unidade derivada* que é definida a partir de outras grandezas e a notação km/h é simplesmente uma convenção e não quer dizer que estamos dividindo km por h mas convenientemente está diretamente relacionada com a dimensão de uma grandeza.

A dimensão de uma grandeza é a maneira que o valor numérico desta grandeza varia quando se muda o sistema de unidades. Se a unidade usada para exprimir uma grandeza  $x$  seja substituída por uma unidade  $X$  vezes menor, a dimensão desta grandeza será  $X$ . Se esta dimensão  $X$  for dependente de outras dimensões temos uma dimensão derivada. Se por outro lado,  $X \equiv 1$  a grandeza é conhecida como uma *grandeza adimensional*. Uma notação inicialmente proposta por Maxwell (MAXWELL, 1871), é usada para se escrever a dimensão de uma grandeza. A dimensão da grandeza  $x$  é  $X$ :

$$[x] = X$$

Exemplos:

- Diâmetro da esfera  $[D] = L$
- Velocidade do fluido  $[U] = L/T$
- Densidade do fluido  $[\rho] = M/L^3$
- Viscosidade do fluido  $[\mu] = M/(L \cdot T)$

Usando as definições acima,

$$[Re] = \left[ \frac{\rho \cdot U \cdot D}{\mu} \right] = \frac{[\rho] \cdot [U] \cdot [D]}{[\mu]} = \frac{\frac{M}{L^3} \cdot \frac{L}{T} \cdot L}{\frac{M}{L \cdot T}} = 1$$

Ou seja, o número de Reynolds é adimensional, ou seja, se mudarmos a sistema de unidades, o valor do número de Reynolds não muda. Um parâmetro adimensional é um parâmetro que tem dimensão 1 e portanto não muda quando se muda o sistema de unidades.

A notação usual para se exprimir unidades reflete naturalmente a dimensão de uma grandeza. Já mostramos que a dimensão de força é

$$[F] = [ma] = \frac{M \cdot L}{T^2}$$

O jeito usual de se representar uma unidade de uma grandeza está diretamente relacionada à dimensão. Na prática, sabemos a unidade e obtemos a dimensão diretamente substituindo a unidade pela dimensão correspondente. No caso da força:

$$\frac{kg \cdot m}{s^2} \longrightarrow \frac{M \cdot L}{T^2}$$

## 5.4 Classes e Sistemas de Unidades

As unidades utilizadas para se representar uma grandeza podem ser fundamentais ou derivadas. As unidades derivadas são obtidas a partir de princípios físicos bem estabelecidos como a unidade de força Newton que é definida a partir da segunda lei de Newton e está relacionada com a massa e aceleração:

$$N \equiv kg \cdot \left( \frac{m}{s^2} \right)$$

Em mecânica, é usual definir três grandezas básicas para se representar qualquer tipo de fenômeno:  $L$ ,  $M$  e  $T$ . Caso outros fenômenos físicos estejam presentes, outras unidades podem ser necessárias. Se termodinâmica for importante, é conveniente adicionar a temperatura (dimensão  $\Theta$ ). Quando eletricidade é importante, adicionamos a dimensão corrente  $I$ . O que é necessário vai depender dos fenômenos físicos envolvidos. Em geral utilizamos o sistema internacional de unidades (BIPM, 2019) - SI que define de maneira precisa sete unidades básicas. Outras unidades são definidas a partir de princípios físicos estabelecidos. Hoje em dia parece dogma quais as grandezas básicas. Em mecânica são comprimento, massa e tempo mas na realidade isto é arbitrário. Um exemplo pode ser visto no próprio SI: o metro é definido a partir da velocidade da luz no vácuo, fixada como  $299792458 \text{ m s}^{-1}$  e o segundo, definido por uma propriedade física da do átomo de Césio 133. Neste sentido, o comprimento seria uma unidade derivada! Hoje o SI é um sistema que independe de qualquer objeto físico e depende apenas de constantes físicas.

Mas no dia a dia, o metro é simplesmente o que um régua mede, assim como o segundo é o que o cronômetro mede e o quilograma é o que uma balança mede. O conjunto de dimensões básicas usadas para representar as grandezas de um fenômeno é a classe do sistema de unidades. Em problemas envolvendo mecânica, em geral usamos a classe  $LMT$  (L - comprimento, M - massa, T - tempo).

Devido ao uso extensivo do sistema internacional, pode parecer que a class  $LMT$  é a única possibilidade mas no fundo isso é arbitrário e deveríamos usar o que for mais conveniente. Em física de partículas é comum usar a energia no lugar da massa. Então neste caso estamos usando a classa  $LET$ . Em engenharia civil, quando se trata de de problemas estáticos, não há inércia e portanto a massa é importante apenas indiretamente na medida

em que o peso depende da massa. Então porque não usar o peso como referência? A classe de unidades  $LFT$  é muito comum! Lembre-se da confusão de unidades: kilograma-força ( $kgf$ ) e libras. Uma libra é força ou massa? Para não haver ambiguidade, é comum ver coisas como  $lbm$  (libra-massa) ou  $lbf$  (libra-força). É confuso hoje mas se não existe massa, não existe muita ambiguidade (se considerarmos  $g$ , a aceleração da gravidade, constante).

Voltando ao nosso velho problema do escoamento de um fluido viscoso ao redor de uma esfera, o que fizemos foi usar um sistema de unidades de classe  $LU\rho$ . Quando nós desenvolvemos as dimensões de cada grandeza do problema tivemos que transformá-las da classe  $LMT$  para a classe  $LU\rho$ , apesar de termos feito isso de maneira implícita.

Resumindo, a classe do sistema de unidades é arbitrária e podemos escolhê-la da maneira que for mais conveniente. Mas o número de unidades básicas independentes deve ser sempre 3 em mecânica, certo? Nem tanto...

Nos sistemas de classe  $LMT$ , a unidade de força é uma unidade derivada a partir da segunda lei de Newton. Mas existe um outro princípio básico que permite definir força: lei da gravitação universal. A unidade de força pode ser definida como a força entre duas massas iguais separadas por uma distância fixa. Se mantivermos como grandezas básicas independentes, o tempo e o espaçamento, então podemos definir força como

$$F = \frac{m^2}{r^2}$$

Repare que não existe a constante da gravitação universal  $G$ ! Se mantivermos a massa como grandeza básica independente, a segunda lei de Newton toma a seguinte forma:

$$F = \frac{ma}{g_c}$$

Qualquer um que tenha olhado um livro de mecânica que usa unidades imperiais reconhecerá esta fórmula. No sistema imperial, existem unidades de força independente da unidade de massa, comprimento e tempo. Mas neste caso é necessário introduzir uma constante para converter a unidade de força de  $lbm \cdot ft \cdot s^{-2}$  para  $lbf$ . Esta conversão é feita pela constante  $g_c$  na equação anterior.

No sistema SI, a unidade de força é derivada então  $g_c = 1$ . Mas no caso da gravitação universal entre duas massas iguais, uma constante de conversão é necessária:

$$F = G \frac{m^2}{r^2}$$

esta constante  $G$ , conhecida como constante universal da gravidade e tem como unidade  $N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$  que pode ser reescrita como

$$N \cdot m^2 \cdot kg^{-2} \equiv \frac{N}{m^{-2} \cdot kg^2}$$

onde fica clara conversão de unidades. O que foi mostrado acima pode ficar claro analisando a unidade de ângulo no SI. Esta unidade é chamada de radiano (*rad*). No SI ela é designada como uma unidade especial. O radiano é definido como a razão entre o arco e o raio, ou seja, a razão entre dois comprimentos. Isso deveria ser uma grandeza adimensional mas como é comum usar graus para se medir ângulos planos, é interessante dar um nome a essa grandeza. Neste sentido, as constantes  $G$  e  $g_c$  acima têm o mesmo papel que  $180/\pi \text{ rad}/^\circ$  para conversão de graus para radianos.

Mas agora temos dois princípios físicos para se definir força. No sistema SI, a unidade de força é definida a partir da segunda lei de Newton e aparece a constante universal da gravidade. Como já escolhemos as unidades de comprimento e tempo como unidades básicas, a unidade de massa seria uma unidade derivada e *seriam necessárias duas unidades básicas independentes* para representar problemas de mecânica. Aplicando outros princípios físicos isso poderia ser reduzido ainda mais. Poderíamos até chegar numa situação onde não existem unidades básicas fundamentais. Porque motivo isto não é feito? Conveniência, muitas medidas usuais seriam representadas por números muito pequenos ou grandes. Mas além disso, o que ganharíamos com isso se o nosso problema não envolve a gravitação universal. Para a maior parte dos problemas do dia a dia, a gravidade pode ser representada por uma única constante, a aceleração da gravidade. A gravitação universal só aparece indiretamente. O importante a ser lembrado é que ainda teremos uma unidade de massa, comprimento e tempo.

### 5.4.1 Classes de sistemas de unidades e o sistema SI

Mas na realidade, a maneira como o sistema internacional de unidades é hoje definido não existem objetos físicos que definem qualquer unidade básica. O SI é construído a partir de princípios físicos universais e bem conhecidos. Para que as medidas do dia a dia sejam convenientes, fatores multiplicativos são usados. Exemplo. O segundo é definido como 9192631770 vezes o tempo de transição do Césio 133. Este número enorme poderia ser igual a 1. Por outro lado, o metro é definido como a distância que a velocidade da luz no vácuo, que é uma constante pré-definida, durante 1 s. A unidade de comprimento poderia ser definida como a distância que a luz percorre no vácuo durante 1 transição do Césio 133 onde a velocidade da luz é definida numericamente como 1. As outras unidades básicas são definidas a partir de outras leis físicas mas os valores numéricos são fixados por conveniência, da mesma maneira que usamos graus no lugar de radianos em várias aplicações.

A pergunta que surge agora é qual o papel da classe do sistema de unidades? O SI foi construído de modo a ser conveniente tanto para uso no dia a dia quanto para a construção de um sistema de rastreabilidade metrológica. Mas estes são detalhes quando vamos resolver um problema de mecânica, ou qualquer outro. Neste caso a classe é escolhida da maneira mais conveniente de modo que os princípios físicos envolvidos sejam os mais simples possíveis.

## 5.5 A dimensão de uma grandeza é sempre um monômio

Aceitamos desde cedo que não se pode somar metros com segundos. Será que isso é sempre verdade. O que queremos dizer na verdade é as dimensões de uma grandeza são sempre monômios como no caso de uma força:

$$[F] = \frac{M \cdot L}{T^2}$$

Será que poderia existir dimensões do tipo

$$\frac{L^2}{T} + \frac{M \cdot T^2}{L^3}$$

O problema na equação acima é a soma. Na realidade é possível em algumas situações usar unidades que envolvam soma. (BARENBLATT, 1996) cita um exemplo: o tempo, em minutos, que se leva para ir de um ponto a outro em Moscou é a soma da distância em *km* com o número de faróis. Ficaria surpreso que isso fosse verdade na Moscou de hoje mas no final da União Soviética com um número muito inferior de carros talvez fosse verdade. Em São Paulo isso pode ter sido verdade no auge da pandemia de COVID-19 em 2020.

De cara pode-se ver um problema com esta relação: se mudar as unidades, já era. O que esta relação empírica aproximada está fazendo na verdade é uma equação do tipo:

$$T = c_1 \cdot L + c_2 \cdot N$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são coeficientes com as seguintes dimensões:

- $[c_1] = \frac{T}{L}$
- $[c_2] = T$

Acontece que numa cidade com avenidas largas e pouco trânsito, uma velocidade típica seria  $60 \text{ km/h}$  ou seja  $1 \text{ km/min}$ . E um farol que demora um pouco menos de  $1 \text{ min}$  é bem comum. Assim a relação original está adotando os coeficientes  $c_1 = 1 \text{ km/min}$  e  $c_2 = 1 \text{ min}$ . No entanto esta equação é rudimentar e restrita demais e se for usada, será apenas em um contexto mais informal e a formulação original é mais fácil de ser lembrada.

A demonstração que faremos aqui foi retirada de (BARENBLATT, 1996). A idéia por trás de toda a análise dimensional é que os fenômenos físicos não devem depender do sistema de unidades. Um outro jeito de enxergar isso é dizer que *não existe um sistema de unidades preferencial*. Com essa hipótese pode-se demonstrar que a dimensão de uma grandeza é sempre um monômio. Seja uma grandeza  $a$ , sua dimensão vale

$$[a] = \phi(L, M, T, \dots)$$

Se mudarmos o sistema de unidades para o sistema 1, o valor de  $a$  no sistema 1 terá o seguinte valor

$$a_1 = a \cdot \phi(L_1, M_1, T_1, \dots)$$

já num sistema 1, temos:

$$a_2 = a \cdot \phi(L_2, M_2, T_2, \dots)$$

Dividindo um pelo outro,

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\phi(L_2, M_2, T_2, \dots)}{\phi(L_1, M_1, T_1, \dots)}$$

Lembrando que estamos admitindo que todos os sistemas de unidade de uma determinada classe são equivalentes, então podemos considerar o sistema 1 como o sistema original:

$$a_2 = a_1 \phi\left(\frac{L_2}{L_1}, \frac{M_2}{M_1}, \frac{T_2}{T_1}, \dots\right)$$

assim temos

$$\frac{\phi(L_2, M_2, T_2, \dots)}{\phi(L_1, M_1, T_1, \dots)} = \phi\left(\frac{L_2}{L_1}, \frac{M_2}{M_1}, \frac{T_2}{T_1}, \dots\right)$$

Derivando a equação acima em relação a  $L_2$  e fazendo  $L_2 = L_1 = L$ , temos

$$\frac{\partial \phi}{\partial L}(L, M, T) \cdot \frac{1}{\phi(L, M, T, \dots)} = \frac{1}{L} \frac{\phi}{L}(1, 1, 1, \dots) = \frac{\alpha}{L}$$

onde  $\frac{\phi}{L}(1, 1, 1, \dots) = \alpha$ . Esta equação pode ser integrada chegando à seguinte expressão:

$$\phi(L, M, T, \dots) = C_1(M, T, \dots)L^\alpha$$

Substituindo na equação anterior, temos

$$\frac{\phi(L_2, M_2, T_2, \dots)}{\phi(L_1, M_1, T_1, \dots)} = \phi\left(\frac{L_2}{L_1}, \frac{M_2}{M_1}, \frac{T_2}{T_1}, \dots\right) = \frac{C_1(M_2, T_2, \dots)}{C_1(M_1, T_1, \dots)} = C_1\left(\frac{M_2}{M_1}, \frac{T_2}{T_1}, \dots\right)$$

Agora repetimos o processo derivando em relação a  $M_2$ . Com isso chegamos a

$$C_1 = M^\beta C_2(T, \dots)$$

o processo pode ser repetido para todas as dimensões independentes da classe e chegamos na seguinte expressão

$$\phi(L, M, T, \dots) = C_N \cdot L^\alpha \cdot M^\beta \cdot T^\gamma \cdot \dots$$

Como  $\phi(1, 1, 1, \dots) = 1$ , então  $C_N = 1$  demonstrando que as funções dimensionais têm sempre a forma

$$\phi = L^\alpha M^\beta T^\gamma \dots$$

## 5.6 Grandezas independentes a dependentes

Escolhida a classe de sistemas de unidades, queremos escrever as as dimensões dos parâmetros relevantes para o nosso problema nesta classe. Assim, no problema do escoamento ao redor da esfera, estamos escolhendo a class  $LMT$ . Os parâmetros deste problema são  $U$ ,  $D$ ,  $\rho$  e  $\mu$  e  $F$  (estamos tratando a força como mais um parâmetro).

Nesta classe,

- $[U] = L/T = L^1 \cdot M^0 \cdot T^{-1}$
- $[D] = L = L^1 \cdot M^0 \cdot T^0$
- $[\rho] = M/L^3 = L^{-3} \cdot M^1 \cdot T^0$
- $[\mu] = M/(LT) = L^{-1} \cdot M^1 \cdot T^{-1}$
- $[F] = ML/T^2$

Temos 5 parâmetros e 3 dimensões na classe ( $L$ ,  $M$  e  $T$ ) e cada parâmetro tem uma dimensão na forma  $L^\alpha M^\beta T^\gamma$ . Dois parâmetros têm dimensões independentes caso

a dimensão de um parâmetro não possa ser escrita em função da dimensão do outro parâmetro. Assim, a única solução para a equação  $[U]^\alpha [D]^\alpha = 1$  é  $\alpha = \beta = 0$ , a solução trivial.

Em geral,  $N$  parâmetros  $X_1, X_2, \dots, X_N$  são independentes caso a única solução da equação

$$X_1^{\alpha_1} \cdot X_2^{\alpha_2} \dots X_N^{\alpha_N} = 1$$

seja a solução trivial  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_N$ .

Voltemos ao nosso velho problema do escoamento ao redor da esfera, e verifiquemos se os parâmetros  $U$ ,  $D$  e  $\rho$  são dependentes ou independentes:

$$[U]^a \cdot [D]^b \cdot [\rho]^c = (L^a \cdot T^{-a}) \cdot (L^b) \cdot (L^{-3c} M^c) = L^{a+b-3c} \cdot M^c \cdot T^{-a+c} = 1$$

com isso, chegamos ao seguinte sistema de equações

$$\begin{array}{rcl} a + b & -3c & = 0 \\ & c & = 0 \\ -a & +c & = 0 \end{array}$$

cuja única solução é  $a = b = c = 0$ . Portanto,  $U$ ,  $D$  e  $\rho$  têm dimensões independentes. Se adicionarmos  $\mu$  a este conjunto, as dimensões são dependentes pois

$$[U] \cdot [D] \cdot [\rho] \cdot [\mu]^{-1} = 1$$

Dados um problema caracterizado por  $N$  parâmetros, o número de parâmetros independentes do maior subconjunto de parâmetros que são independentes. No caso do problema do escoamento ao redor da esfera, o número de grandezas com dimensões independentes é 3.

## 5.7 O teorema dos $\Pi$ s de Buckingham

Finalmente chegamos ao resultado esperado: o teorema dos  $\Pi$ s de Buckingham.

Independente da abordagem empregada qualquer problema será na forma

$$a = f(a_1, a_2, \dots, a_K, b_1, b_2, \dots, b_N)$$

Nesta relação  $a_1, \dots, a_K$  são grandezas com dimensões independentes e  $b_1, \dots, b_N$  são grandezas com dimensões dependentes, assim, pode-se escrever

$$\begin{aligned} [a] &= [a_1]^\alpha [a_2]^\beta \dots [a_K]^\gamma \\ [b_1] &= [a_1]^{\alpha_1} [a_2]^{\beta_1} \dots [a_K]^{\gamma_1} \\ [b_2] &= [a_1]^{\alpha_2} [a_2]^{\beta_2} \dots [a_K]^{\gamma_2} \\ &\dots \\ [b_N] &= [a_1]^{\alpha_N} [a_2]^{\beta_N} \dots [a_K]^{\gamma_N} \end{aligned}$$

Observe que após calcularmos as grandezas  $\alpha, \beta, \dots, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \dots, \gamma_1, \dots, \alpha_N, \beta_N, \dots, \gamma_N$ , as grandezas

$$\Pi = \frac{a}{a_1^\alpha a_2^\beta \dots a_K^\gamma}, \quad \Pi_1 = \frac{b_1}{a_1^{\alpha_1} a_2^{\beta_1} \dots a_K^{\gamma_1}}, \quad \Pi_2 = \frac{b_2}{a_1^{\alpha_2} a_2^{\beta_2} \dots a_K^{\gamma_2}}, \quad \dots \Pi_N = \frac{b_N}{a_1^{\alpha_N} a_2^{\beta_N} \dots a_K^{\gamma_N}}$$

têm dimensão 1 ou seja, são grandezas adimensionais. Assim, a equação original pode ser escrita como

$$\Pi \cdot (a_1^\alpha a_2^\beta \dots a_K^\gamma) = f(a_1, a_2, \dots, a_K, \Pi_1 \cdot a_1^{\alpha_1} a_2^{\beta_1} \dots a_K^{\gamma_1}, \Pi_2 \cdot a_1^{\alpha_2} a_2^{\beta_2} \dots a_K^{\gamma_2}, \dots, \Pi_N \cdot a_1^{\alpha_N} a_2^{\beta_N} \dots a_K^{\gamma_N})$$

ou seja

$$\Pi = \mathcal{F}(a_1, a_2, \dots, a_K, \Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_N)$$

lembrando que todos os sistemas de unidades são equivalentes, é possível escolher um sistema onde, *numericalmente*,  $a_1 = a_2 = \dots = a_K$ . Mas  $\Pi, \Pi_1, \dots, \Pi_N$  são grandezas adimensionais. Assim, neste novo sistema de unidades,

$$\Pi = \mathcal{F}(1, 1, \dots, 1, \Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_N)$$

ou seja

$$\Pi = \Pi(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_N)$$

O resultado que obtivemos aqui quer dizer que a relação entre uma grandeza dimensional e vários parâmetros dimensionais pode ser reescrita como a relação entre uma grandeza dimensional e alguns parâmetros adimensionais onde o número destas grandezas adimensionais é a diferença entre o número de parâmetros original e o número de parâmetros independentes.

No nosso velho exemplo, tínhamos a grandeza  $F$  dimensional que dependia de  $U$ ,  $D$ ,  $\rho$  e  $\mu$  e transformamos isso na relação

$$F = F(U, D, \rho, \mu) \quad \longrightarrow \quad \Pi = \Pi(\Pi_1) \quad \Pi_1 = \frac{\mu}{\rho U D}, \quad \Pi = \frac{F}{\rho D^2 U^2}$$

## 6 Semelhança e modelos em escala reduzida

Até este ponto, consideramos algumas abordagens para se analisar as escalas de um problema. Quando partimos das equações diferenciais do problema, a semelhança ficou clara. A partir da adimensionalização das equações diferenciais e condições de contorno, chega-se a uma família de resultados que dependem de parâmetros adimensionais. Assim, dois casos diferentes são semelhantes se

- O modelo for representativo nos dois casos
- Os adimensionais que caracterizam o problema são iguais nos dois casos

É importante ressaltar o primeiro ponto acima. Voltando ao problema do escoamento ao redor de uma esfera, partimos da seguinte relação funcional

$$F = F(U, D, \rho, \mu)$$

e chegamos à seguinte equação adimensional

$$C_D = C_D(Re)$$

Obtivemos estas relações usando análise dimensional e, também, a partir das equações de Navier-Stokes. Enquanto o modelo de escoamento incompressível de um fluido Newtoniano for representativo, a relação é válida. Não interessa a natureza exata do fluido, se ele for Newtoniano e incompressível e obedece o princípio da aderência completa, dois casos são semelhantes se

$$Re_1 = Re_2$$

Não interessa se o fluido é água, ar ou mercúrio, enquanto o o modelo for representativo, os fenômenos são semelhantes. Caso a velocidade seja alta, compressibilidade ou cavitação podem invalidar o problema. A viscosidade pode depender da temperatura, o que pode atrapalhar um pouco. Outro problema é a geometria. Consideramos apenas o diâmetro da esfera. Mas nenhuma esfera é perfeita, pode haver distorções e rugosidade é extremamente importante em algumas situações. A distribuição de tensões na superfície pode causar deformações e o modelo pode deixar de ser válido.

A validade do modelo é o que vai determinar a semelhança e no final das contas, apenas a experiência (preferencialmente experimental mas também numérica) vai determinar a validade do modelo. Ao se repetir o experimento com diferentes fluidos, dimensões e velocidades, a própria relação funcional  $C_D = C_D(Re)$  pode ajudar a verificar a validade do modelo: as diversas medições colapsarem na mesma curva é um forte indício de que há semelhança. No entanto, a incerteza experimental (ou numérica) pode confundir as coisas.

## 6.1 Modelos em escala reduzida

Uma das principais aplicações da análise dimensional e semelhança é o estudo experimental de algum fenômeno em escala reduzida.

Após a análise dimensional, o problema original é reduzido a uma relação de parâmetros adimensionais:

$$\Pi = \Pi(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_N)$$

Para que o fenômeno seja semelhante tanto no modelo ( $m$ ) quanto no protótipo ( $p$ ), é necessário que

$$\Pi_{1,m} = \Pi_{1,p}, \quad \Pi_{2,m} = \Pi_{2,p}, \quad \dots \quad \Pi_{N,m} = \Pi_{N,p}$$

Se isto for observado, a semelhança é completa. Isto fica bem claro quando se adimensionalizam as equações diferenciais. No problema do escoamento ao redor da esfera isso é equivalente a

$$Re_m = Re_p \quad \longrightarrow \quad \frac{\rho_m D_m U_m}{\mu_m} = \frac{\rho_p D_p U_p}{\mu_p}$$

Em termos de escala,

$$\lambda_\rho \cdot \lambda_D \cdot \lambda_U = \lambda_\mu$$

onde a seguinte notação para escala foi adotada:

$$\lambda_X = \frac{X_m}{X_p}$$

(a escala de  $X$  é a razão entre  $X$  no modelo e  $X$  no protótipo).

### 6.1.1 Semelhança incompleta

Conceitualmente o problema da semelhança está completo. Na prática isso pode não ajudar tanto. Consideremos o vento em um edifício de altura  $L$ . Em um ensaio em túnel de vento, o fluido é o mesmo e portanto

$$\lambda_\rho = \lambda_\mu = 1$$

(não exatamente, variações de temperatura e pressão atmosférica podem influir mas estes efeitos são pequenos).

Com isso,

$$\lambda_U = \frac{1}{\lambda_L}$$

Mesmo em um túnel de vento com grandes dimensões,  $\lambda_L = 1 : 100$ , ou seja,  $\lambda_U = 100 : 1$ . Por outro lado, é comum que a velocidade extrema do vento seja superior a 40  $m/s$ . Para se manter a semelhança, seria necessária uma velocidade de 4000  $m/s$  o que é absurdo! Estamos falando de escoamentos hipersônicos - o modelo quebra completamente. Mesmo com uma escala dimensional de 1 : 100, o escoamento é supersônico ou na melhor

das hipóteses transônico. A semelhaça completa só é possível com um modelo em escala real. Na prática isso inviabiliza qualquer tipo de ensaio.

Mas nem tudo está perdido! É comum que

$$\lim_{\Pi_i \rightarrow \infty} \Pi(\Pi_1, \dots, \Pi_i, \Pi_{i+1}, \dots, \Pi_N) = \Pi'(\Pi_1, \dots, \Pi_{i-1}, \Pi_{i+1}, \dots, \Pi_N) \neq 0$$

ou seja, se  $\Pi_i$  for grande o suficiente,  $\Pi$  independe de  $\Pi_i$ ! Aqui temos semelhaça incompleta. A mesma situação se repete quando  $\Pi_i \rightarrow 0$ . Neste caso, o adimensional  $1/\Pi_i \rightarrow \infty$  e voltamos ao primeiro caso.

Pode parecer um mero detalhe mas a condição  $\Pi' \neq 0$  é importante. Caso contrário a influência de  $\Pi_i$  pode sempre ser sentida. Barenblatt (1996) entra em maiores detalhes neste tipo de problema. Adiante veremos um exemplo com esta situação.

Manuais e normas de aerodinâmica tabelam valores de coeficiente de arrasto para diferentes geometrias. Em muitos casos, o que se tem é um valor de  $C_D$  para cada geometria como pode-se ver em na seção 6.3 da norma NBR 6123(ABNT, 1988). Geralmente estes casos correspondem a corpos rombudos com pontos de separação fixos. Corpos aerodinâmicos apresentam curvas de  $C_D \times Re$  como mostra o clássico Abbott e Doenhoff (1959).

## 6.2 Incompatibilidade entre adimensionais

Veremos nos exemplos que alguns problemas com escoamento em campo gravitacional, um outro adimensional é importante:

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gL}}$$

o número de Froude. Ao se analisar o escoamento em navios, além do número de Reynolds, o efeito das ondas é importante e o número de Froude é o outro adimensional que precisa ser modelado. A semelhaça (completa) neste caso requer

$$Re_m = Re_p \quad Fr_m = Fr_p$$

Para o número de Reynolds já estabelecemos a escala de velocidade  $\lambda_U = 1/\lambda_L$ . Mas para se obter a semelhança do número de Froude,

$$\lambda_U = \sqrt{\lambda_L}$$

Neste caso, a semelhança completa não é uma mera inconveniência onde túneis de vento (ou canais de água) enormes são necessários. Se existir semelhança no número de Reynolds, não haverá semelhança no número de Froude. Mas este caso é ainda pior: quanto mais se acerta Reynolds, pior se modela Froude. A única possibilidade de estudo é em um modelo com escala geométrica 1!

A outra possibilidade é estudar os diferentes efeitos de maneira separada. Um experimento reproduzindo o número de Froude em um canal de água e um outro ensaio com número de Reynolds alto (as dificuldades com Re continuam) em túnel de vento.

### 6.3 Abordagem geral

Ao se analisar um problema, a abordagem geral para atacar o problema deve ser algo parecido com o procedimento a seguir:

1. Determinar os fenômenos físicos relevantes
2. Estabelecer os parâmetros que caracterizam o fenômeno
3. Usando análise dimensional ou as equações diferenciais, chegar nos adimensionais relevantes
4. Usando experiência prévia, estimar o comportamento do problema quando alguns dos adimensionais tendem a infinito (ou zero)
5. Caso a grandeza em estudo tenda a uma constante (dependente dos outros adimensionais, naturalmente), tentar resolver este problema simplificado
6. Se a grandeza em estudo tender a zero (ou infinito), alguma abordagem mais sofisticada pode-se empregada (BARENBLATT, 1996).

7. Se nenhum comportamento simples for observado (ou esperado), não vai ter jeito. Trabalho duro te espera...
8. Se houve simplificação, este resultado simplificado pode ser usado como base para análises mais sofisticadas e precisas.

Na análise dimensional, introduzir parâmetros não dificulta muito o problema então pode-se ser conservador e na dúvida adicionar parâmetros. Por outro lado, na solução do problema, seja por métodos analíticos, numéricos ou experimentais, qualquer adimensional a mais é um trabalho considerável e pode até inviabilizar o estudo. Neste caso, reduzir o número de parâmetros é essencial.

# 7 Exemplos

## 7.1 Pêndulo simples

O nosso primeiro exemplo de equação diferencial foi o pêndulo simples. Vamos tentar usar a análise dimensional. O objetivo é tentar determinar o ângulo instantâneo  $\theta(t)$  e a reação do pêndulo  $N$ .

$$\theta = \theta(t, \theta_0, l, g, m) \quad N = N(t, \theta_0, l, g, m)$$

onde  $m$  é a massa do pêndulo,  $l$  o seu comprimento,  $g$  é a aceleração da gravidade, e  $\theta_0$  é o ângulo inicial do pêndulo que é adimensional. Vamos usar um sistema de unidades de class  $LMT$ . Os diferentes parâmetros têm dimensão:

- $[t] = T$
- $[\theta_0] = 1$
- $[l] = L$
- $[g] = L/T^2$
- $[m] = M$

Já as grandezas que desejamos determinar têm dimensão

- $[\theta] = 1$
- $[N] = ML/T^2$

Com os parâmetros, temos apenas os seguintes adimensionais:

- $\Pi_1 = t\sqrt{g/l}$

- $\Pi_2 = \theta_0$

Já as grandezas que queremos determinar apresentam os seguintes adimensionais

$$\theta = \theta \left( \theta_0, t \sqrt{\frac{g}{l}} \right)$$

$$\frac{N}{mg} = f \left( \theta_0, t \sqrt{\frac{g}{l}} \right)$$

Porque a massa não está do lado direito? Temos 5 parâmetros, sendo que 3 têm dimensões independentes. Um adimensional é o próprio ângulo inicial  $\theta_0$  e o outro é  $\Pi_1 = t \sqrt{g/l}$ . Pensando fisicamente, isso é natural: a única força externa é o peso que é proporcional à massa mas a aceleração também é proporcional à massa e assim se cancelam. Mas a massa aparece no cálculo da reação  $N$ . Porque  $N$  não foi colocado no lado direito da equação? A reação  $N$  não pode ser especificada ou controlada. Ela é resultado da dinâmica do problema, ela é consequência e não causa: existe diferença entre o lado direito e o lado esquerdo da equação.

E o período de oscilação. Neste caso,  $t$  pode ser retirado do lado direito (não é mais um parâmetro) e assim do lado direito só existe o adimensional  $\theta_0$ . Então temos

$$T \sqrt{\frac{g}{l}} = f_2(\theta_0)$$

Será que conseguimos fazer algo a mais com isso? Vejamos o que acontece no limite  $\theta_0 \rightarrow 0$ . Neste caso existe a solução linear e sabemos que

$$\lim_{\theta_0 \rightarrow 0} T \sqrt{\frac{g}{l}} = f_2(0) = 2\pi$$

Agora temos uma solução aproximada que vale num limite de um dos adimensionais. Esta solução aproximada poder ser usada como referência:

$$T = 2\pi \left( \sqrt{\frac{l}{g}} \right) \phi(\theta_0)$$

onde  $\phi(0) = 1$ .

### 7.1.1 E se existir amortecimento?

Precisamos de um modelo para o amortecimento. Poderíamos seguir o que fizemos para a queda de uma bola de boliche mas agora estamos mais preocupados com baixas velocidades. Assim, a força de amortecimento pode ser proporcional à velocidade:

$$F_a(t) = -c|U|$$

Agora temos o novo parâmetro  $c$  que deve ser considerado. A dimensão de  $c$  é

$$[c] = \frac{M}{T}$$

Então,

$$\theta = \theta(t, \theta_0, l, g, m, c) \quad N = N(t, \theta_0, l, g, m, c)$$

Agora temos 6 parâmetros e 3 parâmetros com dimensões independentes:

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= t\sqrt{\frac{g}{l}} \\ \Pi_2 &= \theta_0 \\ \Pi_3 &= \frac{c}{m}\sqrt{\frac{l}{g}}\end{aligned}$$

Chamando  $\omega_N = \sqrt{g/l}$ , a frequência natural, e lembrando da equação do oscilador (massa mola amortecedor),

$$\Pi_3 = 2\zeta$$

onde  $\zeta$  é a razão de amortecimento. O interessante é que no momento onde introduzimos um amortecimento, a massa volta a ser parte do problema.

## 8 E agora? Conclusões e discussão

# Referências

- ABBOTT, I. H.; DOENHOFF, A. E. V. *Theory of wing sections: including a summary of airfoil data*. [S.l.]: Dover Publications, 1959. 59
- ABNT. *Forças devidas ao vento em edificações*. 1988. 59
- BARENBLATT, G. I. *Scaling, self-similarity, and intermediate asymptotics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1996. 38, 50, 59, 60
- BARENBLATT, G. I. *Scaling*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2003. 38
- BIPM. *The International System of Units*. 2019. 46
- BIRKHOFF, G. *Hydrodynamics, a study in logic, fact and similitude*. Revised. [S.l.]: Princeton University Press, 1960. 24, 27
- MAXWELL, J. C. On the mathematical classification of physical quantities. *Proceedings of the London Mathematical Society*, III, n. 34, 1871. 44
- TRITTON, D. J. *Physical fluid dynamics*. [S.l.]: Oxford Science Publications, 1988. 29